

# المقدمة

## Introduction

في الآونة الأخيرة كثرت تطبيقات علم المرونة وازدادت أهميته بعد ظهور بعض العلوم الحديثة مثل علوم النانو وعلوم هندسة المواد حيث تم الاعتماد في النظريات الأساسية فيهما على أساسيات علم المرونة بأنواعها المختلفة مثل المرونة الحرارية والمرونة المغناطيسية و المرونة للمواد اللزجة وغيرها. وظهرت بعض تطبيقات المرونة في العديد من الصناعات الهامة و الخطيرة مثل المفاعلات النووية ، وأجزاء الحاسب الآلي ، و بعض الأجهزة الطبية الدقيقة وفي استخدام الليزر، لذلك أصبح من الضروري الاهتمام بهذا العلم والعمل على تنمية فروعها.

وكانت نظرية المرونة ( Theory of Elasticity ) في بدايتها تهتم بدراسة سلوك المادة وخصائصها فقط ، من ناحية الشكل والحجم وما يحدث لهما من تغيرات بعد زوال القوى المؤثرة عليهما والمسببة للتغيير في كليهما [1] (Timoshenko and Goodier) أما الآن فإن الدراسة لا تعتمد على الشكل والحجم فقط .

ففي عام 1678 م كان العالم روبرت هوك (R. Hook) هو أول من وضع تعريفاً لكلمة المرونة (Elasticity) حيث قام بصياغة أول قانون يربط بين القوة المؤثرة على جسم مرن (Elastic) ومقدار الانفعال ( الاستطالة ) الذي حدث في الجسم [2] (Fung) ، ثم قام العالم

كوشي (Cauchy) بوضع تصور رياضي لنظرية المرونة الخطية (Theory of Linear Elasticity) لجسم معزول حرارياً (Thermally Isolated) [3] ..

وعلم المرونة الحرارية (Thermoelasticity) يعتبر من أهم فروع علم الميكانيكا التطبيقية الذي يهتم بالتأثير الحراري وعلاقته بالإجهادات (Stresses) والانفعالات (Strains) التي تحدث في الأجسام المرنة [4] (Sokolnikoff) .

وبالرغم من أن لنظرية المرونة الحرارية تاريخ طويل إلا أن أساسيات هذه النظرية لم توضع إلا في منتصف القرن التاسع عشر ، وذلك على يد كل من العالمين ديوهامل [5] (Duhamel) و نويمان [6] (Neumann) ، ومنذ ذلك الحين لم يحدث في تلك النظرية أي تقدم حتى النصف الثاني من القرن العشرين .

ونظرية المرونة الحرارية تتعامل مع المؤثرات الميكانيكية و الحرارية على الجسم المرن ، وقد كان ديوهامل [5] (Duhamel) أول من ناقش قواعد لحل مسائل في المرونة الحرارية في القرن التاسع عشر . وفي عام 1855 قام العالم نويمان [6] (Neumann) بإعادة استنتاج المعادلات التي حصل عليها ديوهامل [5] (Duhamel) باستخدام مدخل آخر ، وقد سميت نظريتهما بنظرية المرونة الحرارية غير المرتبطة (Uncoupled) .

والمعادلات الحاكمة لهذه النظرية (Governing Equations) تتكون من معادلة الحرارة وهي مستقلة عن التأثيرات الميكانيكية ومن معادلة الحركة التي تحتوي على الحرارة كدالة معلومة ، ولهذه النظرية عيبان رئيسيان هما :

الأول : أن الحالة الميكانيكية للجسم ليس لها تأثير على الحرارة ، وهذا غير صحيح من الناحية الفيزيائية.

الثاني : أن معادلة الحرارة وهي معادلة تفاضلية جزئية مكافئة تتضمن أن سرعة انتشار الحرارة لا نهائية ، وهذا فيه تناقض مع التجارب العملية.

وفي عام 1956 م قام العالم بيوت [7] (Biot) باستنتاج نظرية المرونة الحرارية المرتبطة (Coupled) ، وفي هذه النظرية تكون معادلات المرونة مرتبطة بالاتصال الحراري (Thermal Continuity)، وهذا يتفق مع التجارب الفيزيائية ، حيث أن التغير في الحرارة يؤدي إلى انفعال الجسم المرن والعكس صحيح.

وتتكون المعادلات الحاكمة لهذه النظرية من معادلة الحركة وهي معادلة تفاضلية جزئية زائدية ، ومن معادلة التوصيل الحراري وهي معادلة تفاضلية جزئية مكافئة.

ولهذه النظرية عيب وحيد وهو أن المعادلة الثانية معادلة تفاضلية جزئية مكافئة والتي تتضمن أنه إذا كان الوسط ممتد إلى ما لا نهاية وتعرض لتأثير حراري أو ميكانيكي فإن هذا التأثير سوف يكون محسوساً عند نقاط تبعد بعداً لانهائياً عن مصدر التأثير ، وهذا يتناقض مع التجارب الفيزيائية مما يجعلنا في حاجة ماسة إلى معادلة طاقة جديدة من النوع الزائدي لتلافي هذا العيب.

وفي عام 1967 م قام العالمان لورد وشولمان [8] (Lord and Shulman) باستنتاج نظرية المرونة الحرارية المعممة (Generalized) في الحالة الخاصة عندما يكون الجسم متماثلاً (Isotropic) ، وفي عام 1980م قام داليوال وشريف [9] (Dhaliwal and Shereif) بتعميم هذه النظرية لتشمل الأجسام غير المتماثلة (Anisotropic)[10].

وفي هذه النظرية أمكن إحلال قانون جديد للتوصيل الحراري يتضمن كلا من الفيض الحراري ومعدلاته الزمنية محل قانون فوريير للانتشار الحراري (Thermal diffusion) ،

وقد أمكن التوصل في هذه النظرية إلى معادلة الحرارة في صورة معادلة تفاضلية جزئية زائدية وبهذا تم إلغاء تناقض السرعات اللانهائية الموجودة في النظريات المرتبطة وغير المرتبطة للمرونة الحرارية .

وفي أغلب الأبحاث السابقة كان الافتراض بأن خواص المادة الممتلئة في معاملات المرونة (The elastic moduli) ومعاملات التوصيل الحراري (Thermal conductivity moduli) بأنها كلها مقادير ثابتة ، ولكن في بعض الحالات يكون هذا غير صحيح فبعض المواد لها خاصية التغير في الخواص مع تغير الحرارة أو الأبعاد ، فعلى سبيل المثال مادة نيترات السليكون وهي مادة تدخل في كثير من الصناعات فقد وجد أن معامل التوصيل الحراري لهذه المادة يتناقص بنسبة 45% من قيمته الابتدائية عندما ترتفع درجة حرارته إلى 400 درجة مئوية، ولهذا تهتم هذه الرسالة بدراسة تلك الحالات .

وفي عام 1968م قام شين و جورتن [51] (Chen and Gurtin) بوضع نظرية للتوصيل الحراري للأجسام المرنة ، والتي تعتمد على نوعين مختلفين من درجات الحرارة ، ثم قام قارين و شين عام 1973م [52] ، [53] (Warren and Chen) بدراسة التقدم الموجي لوسط تحت ضوء نظرية المرونة الحرارية المرتبطة في حالة وجود درجتى حرارة للوسط . وفي عام 2006م قام يوسف [12] (Youssef) بتطوير نظرية مرونة حرارية معممة جديدة آخذاً في الاعتبار قانون توصيل حراري للمواد المرنة يعتمد على نوعين مختلفين من درجتى الحرارة تسمى الأولى درجة الحرارة الموصلة (The heat conduction temperature) ، وتسمى الثانية درجة الحرارة الديناميكية (The thermo-dynamic temperature) حيث يتناسب الفرق بين درجتى الحرارة طردياً مع الإمداد الحراري (Heat supply) للوسط ، وقام يوسف أيضاً بإثبات وحدانية الحل بالمعادلات الحاكمة لهذه النظرية.

تتكون هذه الرسالة من ثلاثة أبواب :

## الباب الأول :

### مقدمة في نظرية المرونة الحرارية

#### **Introduction to the theory of thermoelasticity**

ويعرض هذا الباب بعض أساسيات نظرية المرونة و قوانين الديناميكا الحرارية ، وكيفية ربطها بنظرية المرونة الخطية للوصول لنظرية المرونة الحرارية ويعرض كذلك صياغة بعض القوانين و العلاقات الخاصة والهامة لهاتين النظريتين. ويحتوي أيضا على عرض مختصر لبعض أنواع النظريات التي ظهرت مثل نظرية المرونة الحرارية غير المرتبطة ، و نظرية المرونة الحرارية المرتبطة ، مع ذكر عيوب كل نظرية و كذلك شكل التطور من نظرية إلى أخرى ، وكيف عالجت النظرية الأخيرة أحد أوجه القصور في النظرية السابقة لها . كما يحتوي هذا الباب أيضا على استنتاج كامل لنظرية المرونة الحرارية المعممة ذات الزمن الاسترخائي الواحد ، و توضيح كيف عالجت أوجه القصور في النظريتين السابقتين لها. وكذلك يحتوي الباب على استنتاج نظرية المرونة الحرارية ذات درجتى حرارة ، وتوضيح التعديل الذي حدث في تلك النظرية عما قبلها من تعديل لقانون فوربيير للتوصيل الحراري ، حيث اعتمد في هذه النظرية على نوعين مختلفين من الحرارة أحدهما الحرارة الموصلة ، و الأخرى الحرارة الديناميكية.

## الباب الثاني :

المرونة الحرارية المعممة لجسم غير منتهي يحتوي على فجوة اسطوانية وخواصه متغيرة

### **Generalized thermoelasticity of an infinite body with a cylindrical cavity and variable material properties**

في هذا الباب، سيتم حل تطبيق لوسط مرن غير منتهي و يحتوي على فجوة أسطوانية حيث تتغير خواص هذا الوسط مع تغير الحرارة و ذلك في سياق نظرية المرونة الحرارية المعممة ذات الزمن الاسترخائي الواحد عندما يتأثر السطح الداخلي للفجوة بصدمة حرارية و صدمة ميكانيكية. سيتم استخدام محولات لابلاس لإيجاد الحل العام ومن ثم إيجاد معكوساته عددياً و ذلك باستخدام متسلسلة فوريير ثم عرض النتائج بيانياً ومناقشتها.

## الباب الثالث :

نظرية المرونة الحرارية ذات درجتى حرارة عندما يكون معامل التوصيل الحراري متغيراً

### **Two-temperature generalized thermoelasticity with variable thermal conductivity**

في هذا الباب سيتم استخدام إحدى نظريات المرونة الحرارية الحديثة و التي ظهرت في عام 2006 على يد يوسف و التي تسمى نظرية المرونة الحرارية المعممة ذات درجتى

حرارة و التي سبق التحدث عنها في الباب الأول. سيكون هذا الباب بمثابة مقارنة بين نتائج هذا النظرية و النظريات السابقة و التي كانت تعتمد على درجة حرارة واحدة للوسط وذلك من خلال بناء نموذج رياضي لوسط مرن خالي من أي قوة حجمية خارجية ومن أي مصدر حراري داخلي وخامل وكل معاملات الوسط ثابتة مثل معاملات المرونة و معامل التمدد الحراري ولكن معامل التوصيل الحراري متغير على صورة دالة خطية مع درجة حرارة الوسط.

## الباب الأول

### مقدمة في نظرية المرونة الحرارية

### **Introduction to The Theory of Thermoelasticity**



## 1-1: نظرية المرونة الخطية :

### Theory of linear elasticity

في نظرية المرونة الخطية نفترض أن الوسط تام المرونة (perfectly elastic) أي أن الجسم يستعيد شكله الطبيعي بالكامل بعد زوال القوى الخارجية المؤثرة عليه والتي أحدثت له التشوه ، وأيضاً نفترض أن الجسم متجانس (Homogeneous) أي أن كل جزيئات الوسط لها نفس الخواص الفيزيائية ، وأيضاً متماثل (Isotropic) أي أن خواص الوسط لا تتغير بتغير الاتجاه أو المحاور [2], [13].

متجه الإزاحة (Displacement Vector) التي تحدث لجزيئات المادة نرسم له بالرمز  $u_i$  ومتجه الانفعال الذي يحدث للمادة يمكن التعبير عنه بدلالة انحدار دالة الإزاحة ويكتب على صورة مركبات الممتدات (Tensor) ويرمز له بالرمز  $e_{ij}$  ، وتكون مركبات الإجهاد أيضاً في صورة الممتدات ويرمز لها بالرمز  $\sigma_{ij}$  .

ونفترض وجود وسط متصل (Contineous Medium) يشغل الحجم  $V$ ، ومحاط بالسطح  $S$  ، ويتأثر بالقوى الخارجية  $F_i$  لوحدة الكتلة وله كثافة  $\rho$  ، ومركبات الضغط على السطح هي  $p_i = \sigma_{ij} n_j$  حيث أن  $n_i$  هو متجه الوحدة العمودي على السطح الخارجي للوسط ، ومعادلة الحركة تكون على الصورة التالية :

$$\int_V \rho F_i dV + \int_S \sigma_{ji} n_j dS = \int_V \rho \ddot{u}_i dV . \quad (1.1.1)$$

وسنفترض أن الدالة  $\sigma_{ij}$  وتفاضلها الجزئي من الرتبة الأولى  $\sigma_{ij,k}$  دوال متصلة ووحيدة

القيمة على الحجم  $V$  ، وباستخدام نظرية التباعد لجاوس (Gauss Divergence Theorem)

وتطبيقها على التكامل السابق فإننا نحصل على :

$$\int_V \left[ \rho F_i + \sigma_{ji,j} - \rho \ddot{u}_i \right] dV = 0. \quad (1.1.2)$$

حيث أن عنصر الحجم  $V$  تم اختياره عشوائياً من وسط متصل ، فإنه لا يمكن أن يندمج  
لذلك فإن :

$$\sigma_{ji,j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i . \quad (1.1.3)$$

وتعرف المعادلة السابقة بالقانون الأول للحركة ، وهي تعرف أيضاً بمعادلة الحركة  
لكوشي.

وحيث أننا نتعامل هنا مع النظرية الخطية، وباستخدام مبدأ العزم الزاوي فإننا نحصل

على :

$$M_i = \int_V \varepsilon_{ijk} x_j (\rho F_i - \rho \ddot{u}_i) dV + \int_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{ji} n_j dS = 0. \quad (1.1.4)$$

وباستخدام نظرية التباعد لجاوس ومعادلة الحركة لكوشي فإننا نحصل على :

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{ji} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3 . \quad (1.1.5)$$

ومنها نحصل على خاصية التماثل لمركبات الإجهاد كما يلي :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} , \quad i, j = 1, 2, 3 . \quad (1.1.6)$$

في المعادلات السابقة تم استخدام الرمز التبادلي  $\varepsilon_{ijk}$  والمعروف كما يلي :

$$\varepsilon_{ijk} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \text{إذا كان عدد التبادلات زوجي} \\ -1 \quad \text{إذا كان عدد التبادلات فردي} \\ 0 \quad \text{إذا تساوى على الأقل اثنين منهم} \end{array} \right. \left( \begin{array}{l} 1 \ 2 \ 3 \\ i \ j \ k \end{array} \right)$$

ويُعرف بممتد ليفر - سفيتا .

عندما تتغير المسافات البينية لجزيئات وسط متصل فإن الوسط يكون في هذه الحالة في حالة انفعال ، ويسمى التغير النسبي لأوضاع تلك الجزيئات بالتشوه ، وتكون العلاقة بين مركبات الانفعال والإزاحة على الصورة التالية [13]:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} ( u_{i,j} + u_{j,i} ) .$$

ويتضح من العلاقة السابقة التماثل لمركبات الانفعال  $e_{ij}$  أي أن :

$$e_{ij} = e_{ji} . \quad (1.1.7)$$

وطبقاً لقانون هوك لجسم مرن فإن العلاقة بين مركبات الإجهاد ومركبات الانفعال يمكن وضعها على الصورة التالية [4] :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} . \quad (1.1.8)$$

حيث أن المركبات الممتدة  $C_{ijkl}$  ، تسمى معاملات المرونة للوسط ، ولا بد أن تحقق علاقات التماثل التالية :

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{klij} = C_{jilk} .$$

ويصل عدد هذه المعاملات إلى 36 معامل يمكن أن تختصر إلى 21 معامل بالاستعانة بالدالة  $W$  المعرفة على الصورة التالية :

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} . \quad (1.1.9)$$

وإذا كان الوسط متماثل فإنه يمكن كتابة المعاملات  $C_{ijkl}$  على الصورة التالية :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) ,$$

حيث  $\delta_{ij}$  هي دالة دلتا كرونكر (Kronecker delta function) و تعرف بالصورة التالية :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} .$$

وبناءً على ذلك يصبح قانون هوك (Hook's law) على الصورة المختصرة التالية :

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad . \quad (1.1.10)$$

والمعادلة السابقة تحتوي على ثابتين  $\lambda$  و  $\mu$  ويعرفان بمعامل المرونة للامي ( Lamé's Coefficients ).

ويمكن كتابة العلاقة العكسية على الصورة التالية :

$$e_{ij} = \frac{-\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad . \quad (1.1.11)$$

ويتضح من العلاقتين السابقتين أن  $e_{ij}$  يمكن أن يُعين بقيمة وحيدة بدلالة  $\sigma_{ij}$  فقط

عندما  $\mu \neq 0$  و  $3\lambda + 2\mu \neq 0$  ، وحتى تتعدم قيمة الانفعال لقيم الإجهاد المنتهية يجب أن

يتحقق الشرطان :

$$|\mu| < \infty \quad , \quad |3\lambda + 2\mu| < \infty .$$

## 1-2: أساسيات الديناميكا الحرارية:

### Fundamentals of thermodynamics

الديناميكا الحرارية فرع من فروع الفيزياء يهتم بدراسة حالات المادة في وجود الحرارة ، حيث تلعب درجة الحرارة دوراً مهماً جداً ، فالنظام الديناميكي الحراري عبارة عن مجموعة من المواد توضع تحت الدراسة والاهتمام ومحاطة بوسط خارجي .

وإذا كان النظام في المرونة الحرارية مثل قضيب أو طبقة أو غلاف يتأثر بقوى خارجية ويسمح بانتقال الطاقة فإنه يسمى نظاماً مفتوحاً (Open) ، ويسمى مغلقاً (Close) إذا لم يسمح بانتقال الطاقة . الحالة (state) هي نظام معروف الخواص والحدود (boundary) وقد يكون هناك حوائط (walls) وهي الأجزاء التي تحدد النظام والتي يحدث خلالها التبادل الحراري (Heat exchange) [14] (Andrews) ، [15] (Guggenheim) .

يسمى النظام مانع للحرارة (أدياباتي أو كظيم) (Adiabatic) حين لا يسمح بانتقال الحرارة ، ويسمى معزولاً (Isolated) إذا كان لا يسمح بانتقال الحرارة وليس فيه حركة ، والمتغيرات في النظام مثل الحجم والكتلة تسمى دالة الحالة . ويعتبر النظام في حالة اتزان (Equilibrium) إذا كانت متغيراته لا تتعلق بالزمن [14] (Andrews).

وهناك نوعان من العمليات التي تتم على النظام ، عملية انعكاسية (Reversible) وغير انعكاسية (Irreversible) ، في العملية الانعكاسية يكون النظام في حالة اتزان مع الوسط الخارجي طوال الوقت ، أما في العملية غير الانعكاسية (الطبيعية) يكون النظام في حالة

عدم اتزان مع الوسط الخارجي طوال الوقت حيث يتم فقد أو اكتساب للطاقة (Andrews) [14].

$$dK + dE = dQ + dW \quad (1.2.1)$$

يسمى هذا القانون بالقانون الأول للديناميكا الحرارية حيث  $W$  يمثل الشغل المبذول ، و  $Q$  يمثل كمية الحرارة ، و  $E$  الطاقة الداخلية ، و  $K$  تمثل الطاقة الحركية [14] (Andrews).

وبدراسة القانون الثاني للديناميكا الحرارية سوف نتعرف على خاصية تسمى الانتروبي

(Entropy) وهو ما يعرف بالتعادل الحراري  $\eta$  :

$$d\eta = d_e\eta + d_i\eta \quad (1.2.2)$$

تمثل  $d\eta$  الزيادة في الانتروبي للنظام ، و  $d_e\eta$  تمثل الزيادة في الانتروبي للنظام نتيجة التفاعل مع المحيط الخارجي ، و  $d_i\eta$  تمثل الزيادة في الانتروبي للنظام نتيجة للتغيرات التي تحدث داخله .

والكمية  $d_e\eta$  ترتبط بكمية الحرارة  $Q$  التي تتدفق إلى النظام من الوسط الخارجي المحيط به بالعلاقة التالية :

$$d_e\eta = \frac{Q}{T} \quad (1.2.3)$$

حيث  $T$  هي درجة الحرارة المطلقة للنظام .

أما الكمية  $d_i \eta$  فهي دائماً كمية غير سالبة كما يلي :

$d_i \eta > 0$  للعملية غير الانعكاسية (Irreversible)

$d_i \eta = 0$  للعملية الانعكاسية (Reversible)

ومنها نجد أن:

$d \eta > \frac{Q}{T}$  للعملية غير الانعكاسية

$d \eta = \frac{Q}{T}$  للعملية الانعكاسية

وهذا يعرف بالقانون الثاني للديناميكا الحرارية [14], [15].

### 3-1: الديناميكا الحرارية لتشوه جسم مرن

#### Thermodynamics of deformed elastic body

نفرض أن لدينا وسط مرن كثافته  $\rho$  وهي لا تعتمد على الزمن و حجمه  $V$  ،

وباستخدام قانون بقاء المادة (Conservation law of mass) نجد أن :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad , \quad (1.3.1)$$



ومن ذلك نستطيع الحصول على معادلة الاتصال (Continuity equation) على الصورة

التالية [16](Nowinski) :

$$\frac{d}{dt}(\rho dV) = 0 \quad . \quad (1.3.2)$$

وباستخدام القانون الأول للديناميكا الحرارية على الصورة التالية :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \varepsilon dV + \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV = \int_V \rho F_i \dot{u}_i dV + \int_S \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i dS \\ + \int_V \rho Q dV - \int_S q_i n_i dS \quad . \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

حيث  $Q$  تمثل شدة المصدر الحراري (Heat source) لوحدة الكتل ، و  $q_i$  تمثل الفيض الحراري (الحرارة التي تنتقل من خلال الوسط عبر السطح المحيط به في وحدة الزمن ووحدة المساحة في اتجاه المحور  $x_i$ ) و  $\varepsilon$  تمثل الطاقة الداخلية لوحدة الكتل ،  $\rho$  لا تعتمد على الزمن ،  $u_i$  تمثل مركبات الإزاحة للوسط ، و  $n_i$  متجه الوحدة العمودي على السطح .

وباستخدام المعادلة (1.3.2) نحصل على :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \varepsilon dV = \int_V \left[ \rho \frac{d\varepsilon}{dt} dV + \varepsilon \frac{d}{dt}(\rho dV) \right] = \int_V \rho \frac{d\varepsilon}{dt} dV \quad . \quad (1.3.4)$$

ومن المعادلة (1.1.3) نحصل على :

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV = \int_V \rho \dot{u}_i F_i dV + \int_V \sigma_{ji,j} \dot{u}_i dV . \quad (1.3.5)$$

وباستخدام نظرية التباعد لجاوس في المعادلة (1.3.3) واستخدام المعادلتين (1.3.4) و (1.3.5) نحصل على :

$$\int_V \left( \rho \frac{d\varepsilon}{dt} - \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} + q_{i,i} - \rho Q \right) dV = 0 . \quad (1.3.6)$$

ويمكننا كتابتها على الشكل التالي :

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} - q_{i,i} + \rho Q . \quad (1.3.7)$$

والمعادلة (1.3.7) تسمى بمعادلة الحركة لكوشي [16]. (قانون الحركة الثاني لكوشي).

ومعادلات الحالة لوسط يتبع المرونة الحرارية يمكن التعبير عنها كما يلي [16] :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(e_{ij}, T, T_{,i}) , \quad (1.3.8)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(e_{ij}, T, T_{,i}) , \quad (1.3.9)$$

$$\eta = \eta(e_{ij}, T, T_{,i}) , \quad (1.3.10)$$

$$\phi = \phi(e_{ij}, T, T_{,i}) , \quad (1.3.11)$$

$$q = q(e_{ij}, T, T_{,i}) \quad , \quad (1.3.12)$$

حيث أن  $\phi$  هي دالة هيلمهولتز ( Helmholtz' function) [11] (Hetnarski) [16] ،  
 وهي دالة تتركب من الطاقة الداخلية والانتروبي ، وتعرف كما يلي :

$$\phi = \varepsilon - T\eta \quad . \quad (1.3.13)$$

والمعادلة (1.3.12) في النظرية الخطية تأخذ الشكل المختصر التالي :

$$q_i = k_i - k_{ij} T_{,j} + k_{ij1} e_{j1} \quad .$$

حيث المعاملات  $k_i$  و  $k_{ij}$  و  $k_{ij1}$  دوال في الموضع والحرارة فقط .

وحيث أن إشارة  $q_i$  يجب أن تتغير في نفس الوقت مع تغير إشارة  $T_{,i}$  ، فإن :

$$-q_i = k_i + k_{ij} T_{,j} + k_{ij1} e_{j1} \quad .$$

ولكل قيم  $e_{ij}$  و  $T$  نجد أن :

$$q_i = -k_{ij} T_{,j} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad . \quad (1.3.14)$$

والمعادلة السابقة تُعرف بقانون فوريير للتوصيل الحراري والمعامل  $k_{ij}$  يعرف بمعامل التوصيل الحراري .

#### 4-1: نظرية المرونة الحرارية غير المرتبطة

##### The theory of uncoupled thermoelasticity

نفترض دائماً في نظرية المرونة الكلاسيكية أن درجة الحرارة تكون ثابتة أثناء تشكل الجسم أو تشوّهه ، والتغير الحراري الذي يحدث للجسم يحدث نتيجة الحركة البينية لجزيئات الجسم ، وهذه الحركة للجزيئات لا تحدث بحرية ، وبالتالي يكون الجسم في حالة إجهاد .

إذا كان لدينا جسم متماثل ( Isotropic ) تحت تأثير تمدد حراري منتظم ، فإننا نفترض عنصر حجمي من هذا الجسم على شكل متوازي مستطيلات طول حرفه  $Z_i^0$  موازي للمحاور فإنه يتمدد ويظل على شكل متوازي مستطيلات طول حرفه بعد التمدد  $Z_i$  وإذا كان التغير الطفيف لدرجة الحرارة يرمز له بالرمز  $\theta(x_1, x_2, x_3)$  فإن التمدد الذي حصل في الجسم ( الزيادة في طول الحرف ) يمكن التعبير عنه كما يلي [16] (Nowinski) ،  
:[17] (Nowacki),

$$Z_i = Z_i^0 (1 + \alpha_T \theta) ,$$

حيث  $\alpha_T$  يعرف بمعامل التمدد الحراري (Thermal Strain Coefficient) للجسم وهي تعتمد على نوع الجسم و تكون بذلك مركبات انفعال الجسم  $e'_{ij}$  والنتيجة من التمدد الحراري فقط على الصورة التالية :

$$e'_{ij} = \alpha_T \theta \delta_{ij} . \quad (1.4.1)$$

وإذا كان التمدد الحاصل للجسم في حال ثبوت درجة الحرارة للجسم ( الإزاحة للجزيئات ) وهو ما يعرف بالتمدد المرن (Elastic strain) يرمز له بالمركبات  $e''_{ij}$  فإن الانفعال الكلي الحاصل للجسم يمكن كتابته على الصورة التالية :

$$e_{ij} = e'_{ij} + e''_{ij} , \quad (1.4.2)$$

حيث أن :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} ( u_{i,j} + u_{j,i} ) .$$

واقترض العالم نويمان (Neumann) في عام 1841 م أن مركبات الانفعال المرن  $e''_{ij}$  ترتبط بمركبات الإجهاد  $\sigma_{ij}$  بالعلاقة التالية :

$$e''_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} \delta_{ij} . \quad (1.4.3)$$

حيث  $\lambda, \mu$  تمثل معاملي المرونة للامي ، و يكون التغير في درجات الحرارة طفيف بما يكفي أن تظل تلك المعاملات ثابتة ، ومن المعادلات (1.4.1)-(1.4.3) نحصل على :

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \left( \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} - \alpha_T \theta \right) \delta_{ij} . \quad (1.4.4)$$

ويمكن كتابة العلاقة السابقة بشكل آخر كما يلي :

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \gamma \theta \delta_{ij} , \quad (1.4.5)$$

حيث أن :

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu) \alpha_T .$$

والعلاقة (1.4.5) تسمى بقانون ديوهامل ونويمان (Duhamel-Neumann law)، حيث استنتجها العالم ديوهامل عام 1838 م وأعاد العالم نويمان استنتاجها بطريقة أخرى عام 1885 م [16] (Nowinski) ، [17] (Nowacki) .

وبالتعويض من المعادلة (1.4.5) في معادلة الحركة :

$$\sigma_{ji, j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i , \quad (1.4.6)$$

فإننا نحصل على :

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho F_i - \gamma \theta_{,i} = \rho \ddot{u}_i . \quad (1.4.7)$$

وإذا كان الجسم غير متماثل (Anisotropic) فإن المعادلة (1.4.5) يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} - \gamma_{ij} \theta . \quad (1.4.8)$$

حيث  $C_{ijkl}$  هي معاملات المرونة للمادة .

وبالتعويض من المعادلة (1.4.8) في المعادلة (1.4.6) نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} e_{kl}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\gamma_{ij} \theta) + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i . \quad (1.4.9)$$

وإذا كان الوسط متجانساً (Homogeneous) فإن المعادلة السابقة تأخذ الشكل التالي:

$$C_{ijkl} e_{kl,j} - \gamma_{ij} \theta_{,j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i . \quad (1.4.10)$$

ولإيجاد معادلة تحققها الحرارة ، سنفترض جسم له الحجم  $V$  محاط بسطح خارجي مغلق  $S$  . الفرق في درجتي الحرارة بين نقطتين من الجسم ناتج عن الفيض الحراري على هذا الجسم ، وإذا كانت كمية الحرارة المتدفقة على هذا الجسم في وحدة الزمن عبر السطح المغلق المحيط بالجسم لوحدة المساحة العمودية على المحور  $x_i$  هي  $q_i$  [16]

(Nowinski) ، [17] (Nowacki) .

في هذه الحالة يكون قانون فوريير للتوصيل الحراري على الصورة :

$$q_i = -k \theta_{,i} \quad . \quad (1.4.11)$$

حيث الثابت  $k$  يعرف بمعامل التوصيل الحراري ، ويعتمد على نوع المادة .

إن كمية الحرارة المتدفقة خلال فترة زمنية  $\Delta t$  عبر عنصر مساحة  $dS$  تساوي :

$$\Delta W = k \theta_{,i} n_i dS \Delta t \quad . \quad (1.4.12)$$

والآن سوف ندرس الاتزان الحراري (Heat Equilibrium) في حجم  $V_1$  محاط بسطح

خارجي مغلق  $S_1$  ويمثل جزءاً من الجسم الأصلي ، فإن كمية الحرارة المتدفقة خلال هذا

السطح في فترة زمنية صغيرة  $\Delta t$  تعطى بالعلاقة التالية :

$$\Delta W' = k \int_{S_1} \theta_{,i} n_i dS \Delta t \quad .$$

وإذا كان هناك مصدر حراري (Heat Source) شدته  $Q$  فإنه يؤثر داخل الجسم ، وبذلك

فإن كمية الحرارة الناتجة عن هذا المصدر الحراري تعطى بالعلاقة التالية :

$$\Delta W'' = \int_{V_1} \rho Q dV \Delta t \quad .$$

ومن ذلك نجد أن كمية الحرارة الكلية هي :



$$\Delta W = \Delta W' + \Delta W'' .$$

ويمكن تعيين نفس كمية الحرارة للجسم بحساب فرق درجات الحرارة في المنطقة  $V_1$  خلال الفترة الزمنية  $\Delta t$  كما يلي :

$$\Delta W = \int_{V_1} \rho C_E \dot{\theta} dV \Delta t ,$$

حيث  $\rho$  كثافة الجسم ، و  $C_E$  هي الحرارة النوعية (the specific heat) للجسم عند ثبوت الانفعال ( أي كمية الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة الجسم بمقدار الوحدة لوحدة الكتل عند ثبوت الانفعال ) ومن ثم :

$$\Delta W = \Delta W' + \Delta W'' .$$

وبذلك نستنتج أن :

$$\int_{V_1} ( \rho C_E \dot{\theta} - \rho Q ) dV - k \int_{S_1} \theta_{,i} n_i dS = 0 .$$

وباستخدام نظرية التباعد لجاوس في التكامل السابق نحصل على :

$$k \theta_{,ii} = \rho C_E \dot{\theta} - \rho Q . \quad (1.4.13)$$

وهي تمثل معادلة الانتشار الحراري (Thermal Diffusion Equation) .

وفي حالة الجسم غير المتماثل يكون قانون فوريير (Fourier's law) للتوصيل الحراري على الصورة التالية :

$$q_i = -k_{ij} \theta_{,j} \quad . \quad (1.4.14)$$

وتصبح المعادلة (1.4.13) على الصورة :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (k_{ij} \theta_{,j}) = \rho C_E \dot{\theta} - \rho Q \quad . \quad (1.4.15)$$

وبذلك تكون المعادلات الأساسية لنظرية المرونة الحرارية غير المرتبطة تتكون من المعادلتين (1.4.7) و (1.4.13) في حالة الجسم المتماثل والمتجانس ، ومن المعادلتين (1.4.9) و (1.4.15) في حالة الجسم غير المتماثل وغير المتجانس .

### 1-5: عيوب نظرية المرونة الحرارية غير المرتبطة :

نرى أن كلا من زوجي المعادلات غير مرتبطة ، حيث أن المعادلتين (1.4.13) و (1.4.15) لا تحتويان على أي حد يمثل المرونة ، فهي عبارة عن معادلة حرارة فقط ، ويمكن إيجاد الحل العام لها بشكل منفرد عن المعادلة المصاحبة لها ، وكذلك بالنسبة للمعادلتين (1.4.7) و (1.4.9) لا يمكن حل أي منهما إلا إذا كانت دالة الحرارة معلومة ومن ثم يمكن إيجاد دالة الإزاحة .

ولذلك نجد أن هذه المعادلات تتعارض مع السلوك الفيزيائي للمواد المرنة ، حيث أن التغير في درجات الحرارة ينتج عنه انفعال للمادة والعكس .

ومن جهة أخرى هذه المعادلات تعني أن التأثير الحراري يمكن أن يصل إلى ما لا نهاية في نفس اللحظة التي بدأ فيها التأثير ، وهذا أيضاً يعد تناقضاً فيزيائياً لخواص المادة المرنة ، حيث أن سرعة تقدم الموجة الحرارية لا بد أن تتعدم على مسافة وزمن كبيرين نسبياً عن مكان ولحظة التأثير .

### 6-1: نظرية المرونة الحرارية المرتبطة

#### Theory of coupled thermoelasticity

نفرض أن حجم الجسم  $V$  وكثافته  $\rho$  في حالة عدم التشوه (Undeformation) ونفرض أيضاً عدم وجود إجهاد على السطح الخارجي للمادة ، وكذلك نفترض ثبوت درجة حرارته ويرمز لها بالرمز  $T_0$  (درجة حرارة الغرفة).

عندما نقوم بالتأثير على الجسم بتحميل خارجي (External Loading) وفي وجود مصدر حراري فإن الجسم يبدأ في التشوه (Deformation) ، وتبدأ الجزيئات بالتحرك ، وبالتالي تزداد قيمة مركبات الإزاحة  $u_i$  ، وترتفع معها درجة حرارة الجسم وتكون الزيادة في

الحرارة عن حرارة الجسم بالصورة التالية  $\theta = (T - T_0)$  بحيث تحقق هذه الزيادة

$$\left| \frac{\theta}{T_0} \right| \ll 1 \quad , \quad \text{الشرط التالي [11] :}$$

ومن المعادلتين (1.3.7) و (1.3.13) نجد أن :

$$\rho \dot{\phi} = \sigma_{ij} \dot{e}_{ij} - q_{i,i} + \rho Q - \rho \eta \dot{T} - \rho T \dot{\eta} \quad . \quad (1.6.1)$$

وباستخدام قاعدة السلسلة (Chain Rule) في معادلة الحالة (1.3.11) نحصل على :

$$\rho \dot{\phi} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial e_{ij}} \dot{e}_{ij} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial T} \dot{T} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial T_{,i}} \dot{T}_{,i} \quad . \quad (1.6.2)$$

وبمقارنة المعادلتين السابقتين ببعضهما نجد أن :

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial e_{ij}} \quad , \quad (1.6.3)$$

$$-\eta = \frac{\partial \phi}{\partial T} \quad , \quad (1.6.4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial T_{,i}} = 0 \quad , \quad (1.6.5)$$

$$-q_{i,i} + \rho Q - \rho T \dot{\eta} = 0 \quad . \quad (1.6.6)$$

وباستخدام المعادلتين (1.6.4) و (1.6.6) نحصل على التالي :

$$q_{i,i} - \rho T \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial e_{ij} \partial T} \dot{e}_{ij} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial T^2} \dot{T} \right) - \rho Q = 0 . \quad (1.6.7)$$

وبوضع مفكوك دالة الجهد ( Potential Function ) للمرونة الحرارية على الصورة :

$$\rho \phi(e_{ij}, T) = \rho \phi_0 + C_{ij} e_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} - \gamma_{ij} e_{ij} \theta + d \theta^2 . \quad (1.6.8)$$

حيث  $\phi_0$  تمثل طاقة الوضع في حالة الثبات في الوضع الطبيعي للجسم ، والمعاملات  $C_{ij}$  ,  $C_{ijkl}$  ,  $\gamma_{ij}$  ,  $d$  كلها عبارة عن دوال في الموضع فقط ، وقد تم إهمال بقية الحدود من مفكوك دالة الجهد لأنها تحتوي على مقادير صغيرة جداً .

وبما أن طاقة الجسم لا بد أن تتعدم عندما تتعدم المركبات  $\theta$  ,  $e_{ij}$  ,  $\sigma_{ij}$  في نفس الوقت فإن

$$C_{ij} = \phi_0 = 0 \text{ المعاملات}$$

وبذلك نجد أن :

$$\rho \phi = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} - \gamma_{ij} e_{ij} \theta + d \theta^2 . \quad (1.6.9)$$

وباستخدام المعادلة (1.6.3) نحصل على :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} - \gamma_{ij} \theta \quad . \quad (1.6.10)$$

وهي عبارة عن مجموعة المعادلات المكملة لنظرية المرونة الحرارية (معادلات الإجهاد) (Stress equations) وهي متحققة للجسم المتماثل وغير المتماثل ، وتسمى هذه المعادلة بمعادلة ديوهامل ونويمان (Duhamel-Neumann equation) ، والمعاملات  $C_{ijkl}$  تعرف بمعاملات المرونة (The elastic moduli) و  $\gamma_{ij}$  تعرف بمعاملات التمدد الحراري (The thermal moduli) [11] .

وبما أن مركبات كلا من الإجهاد والانفعال متماثلة فإننا نحصل على :

$$C_{ijk1} = C_{jik1} = C_{ijlk} = C_{jilk} \quad , \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji} \quad .$$

وباستخدام المعادلتين (1.6.7) و (1.6.9) ومعادلة فوريير للتوصيل الحراري نحصل على المعادلة التالية :

$$\left( k_{ij} \theta_{,j} \right)_{,i} + T_0 \left( 2d\dot{\theta} - \gamma_{ij} \dot{e}_{ij} \right) + \rho Q = 0 \quad . \quad (1.6.11)$$

في المعادلة السابقة تم استبدال دالة الحرارة  $T$  بدالة الحرارة الثابتة  $T_0$  حتى تكون المعادلة على الصورة الخطية .

من المعادلة (1.6.5) و (1.3.13) نستنتج أن الطاقة الداخلية  $\epsilon$  لا تعتمد على  $T_{,i}$  ومنها نحصل على :

$$d\varepsilon = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right) dT + \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial e_{ij}} \right) de_{ij} . \quad (1.6.12)$$

و باستخدام المعادلات (1.6.9), (1.6.4), (1.3.13) مع المعادلة (1.6.12) نحصل على:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = T \frac{\partial \eta}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 \phi}{\partial T^2} , \quad (1.6.13)$$

$$C_E = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = -\frac{2d}{\rho} T , \quad (1.6.14)$$

وحتى تكون المعادلة السابقة في صورة خطية يمكن وضع  $T \approx T_0$  وبذلك نحصل على :

$$d = -C_E \frac{\rho}{2T_0} . \quad (1.6.15)$$

من المعادلتين (1.6.11) و (1.6.15) نجد أن :

$$\left( k_{ij} \theta_{,j} \right)_{,i} - T_0 \gamma_{ij} \dot{e}_{ij} - C_E \rho \dot{\theta} + \rho Q = 0 . \quad (1.6.16)$$

و إذا كان الجسم متماثل فإنه يمكن أن نعوض بالمعاملات كما يلي :

$$k_{ij} = k \delta_{ij} , \quad \gamma_{ij} = \gamma \delta_{ij} .$$

و منها نحصل على صورة المعادلة الحرارية في حالة الجسم المتماثل كما يلي:

$$\left( k \theta_{,i} \right)_{,i} - C_E \rho \dot{\theta} - T_o \gamma \dot{e}_{ii} + \rho Q = 0 . \quad (1.6.17)$$

و إذا كان معامل التوصيل الحراري ثابت  $k = k_0$  تصبح المعادلة السابقة في الشكل :

$$k_o \theta_{,ii} - C_E \rho \dot{\theta} - T_o \gamma \dot{e}_{ii} + \rho Q = 0 . \quad (1.6.18)$$

و إذا كان الجسم متماثل فإن المعادلة (1.6.10) تصبح على الشكل :

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + (\lambda e_{kk} - \gamma \theta) \delta_{ij} . \quad (1.6.19)$$

حيث  $\alpha_T = (3\lambda + 2\mu) \alpha_T$  و  $\gamma = \alpha_T$  تمثل معامل التمدد الحراري .

ولكي نجد معادلة تحققها مركبات الإزاحة نعوض من المعادلة (1.6.10) في المعادلة (1.1.3)

فنحصل على معادلة الحركة للجسم المتجانس وغير المتماثل على الصورة :

$$C_{ijkl} u_{k,Lj} - \gamma_{ij} \theta_{,j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i . \quad (1.6.20)$$

وإذا كان الجسم متماثل تصبح المعادلة السابقة على الشكل :

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho F_i = \gamma \theta_{,i} + \rho \ddot{u}_i . \quad (1.6.21)$$

المعادلات الحاكمة لنظرية المرونة الحرارية المرتبطة تتكون من المعادلتين (1.6.20)

و(1.6.16) للجسم غير المتماثل ، ومن المعادلتين (1.6.17) و (1.6.21) للجسم المتماثل.



## 7-1: مميزات وعيوب نظرية المرونة الحرارية المرتبطة :

إن كل زوج من المعادلات الأساسية لهذه النظرية مرتبطة مع بعضها ، وبذلك تم علاج أحد أوجه القصور في نظرية المرونة الحرارية غير المرتبطة ، حيث أصبح للتأثير الحراري علاقة بالتأثير الميكانيكي ، وبالرغم من ذلك لا زال هناك عيب في تلك المعادلات لم تعالجه هذه النظرية ، و هو أن المعادلتين الحراريتين (1.5.17) ، (1.5.16) هي من نوع معادلة تفاضلية جزئية مكافئية (parabolic partial differential equation) ومن سمات الحل لهذا النوع من المعادلات أنه إذا حدث تغير ما في حالة الجسم عند أي نقطة منه فإن هذا التغير يصل في نفس اللحظة إلى ما لا نهاية وهذا يتناقض مع السلوك الفيزيائي للمواد ، حيث أن الموجات التي تحدث في المادة سواء كانت حرارية أو ميكانيكية لا بد أن تكون ذات سرعات منتهية أو محدودة .

لذلك كان لا بد من إيجاد نوع آخر من المعادلات لتلافي هذا العيب ، وهو ما تم فعلياً في نظرية المرونة الحرارية المعممة . وبالرغم من أن نظرية المرونة الحرارية المرتبطة تتناقض مع فروض الفيزياء فقد ظهر لها العديد من التطبيقات التي استندت إليها النظرية، و على سبيل المثال لا الحصر إثبات وحدانية الحل لهذه النظرية على يد فينير [18](Weiner) ، و كذلك مبدأ التغير على يد كل من نيكل وساكامان [19] (Nickell and Sackman) . وقام هيتنارسكي [20] (Hetnarski) بحل مسألة صدمة حرارية وكذلك أوجد الحل بواسطة متسلسلة من الدوال في [21] و الحل الأساسي للمسألة في [22].

و من الذين شاركوا بأبحاثهم في نظرية المرونة الحرارية المرتبطة أيجناكزاك (Ignaczak) [23] و نواكي (Nowacki) [24] و (تاكيوتي (Takeuti) و تانيجاوا (Tanigawa) ) [25] و لقد

قام هؤلاء العلماء بحل مسائل مختلفة و متنوعة. و كذلك قام باهار (Bahar) وهيتنارسكي (Hetnarski) [26] بتطوير الحل باستخدام طريقة فضاء الحالة في البحث المشترك بينهما.

### 8-1 : نظرية المرونة الحرارية المعممة:

#### Theory of generalized thermoelasticity

عند عرضنا للنظريتين السابقتين ذكرنا وجود عيب رئيسي في كليهما ، وهو أن الحل الذي ينتج من المعادلات الحاكمة لكلتي النظريتين يصل بسرعة غير منتهية عند تزايد الموجة الحرارية وهذا يتناقض مع السلوك الفيزيائي للمواد ، وهذا العيب يتضح جلياً في ذات المعادلات .

في عام 1967م قام العالمان لورد وشولمان [8] (Lord and Shulman) بتطوير نظرية المرونة الحرارية بما يعرف بالصوت الثاني في المواد الصلبة (2nd sound)، وهي ما سميت فيما بعد بـ ( نظرية المرونة الحرارية المعممة ذات الزمن الاسترخائي الواحد ).

ثم قام العالمان داليوال وشريف [10] (Dhaliwal and Sherief) بتعميم هذه النظرية لتشمل الوسط غير المتماثل (Anisotropic). وقد تم تعديل قانون فوريير للتوصيل الحراري لإثبات تلك النظرية ويعرف بـ ( قانون فوريير المعدل للتوصيل الحراري ).

وفي أغلب الحالات التي يكون فيها الوسط غير متمائل ، فإن معادلة الحالة التي تربط الإجهاد بالانفعال والحرارة تكون في الشكل :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} - \gamma_{ij} \theta \quad (1.8.1)$$

حيث  $\gamma_{ij}$  تمثل معاملات الارتباط (Coupling parameters) ، و  $\theta$  تمثل الزيادة الصغيرة في درجة الحرارة .

القانون الأول للديناميكا الحرارية يمكن كتابته بالشكل :

$$\frac{d}{dt} \int_V \left[ \frac{1}{2} v_i v_i + U \right] \rho dV = \int_V \rho F_i v_i dV + \int_S (\sigma_{ji} v_i - q_j) n_j dS \quad (1.8.2)$$

حيث  $V$  عنصراً عشوائياً من حجم المادة ومحاط بسطح مغلق  $S$  و  $v_i = \dot{u}_i$  تمثل مركبات متجه السرعة ، و  $U$  يمثل الطاقة الداخلية لوحدة الكتل ، و  $\rho$  تمثل كثافة المادة وهي لا تعتمد على الزمن و  $F_i$  تمثل مركبات متجه القوة الخارجية لوحدة الكتل، و  $q_i$  يمثل متجه الفيض الحراري ، و  $n_i$  يمثل مركبات متجه الوحدة العمودي على السطح وللخارج .

وباستخدام نظرية التباعد لجاوس ومعادلة الحركة :

$$\sigma_{ji,j} + \rho F_i = \rho \dot{v}_i \quad (1.8.3)$$

وباستخدام التماثل نجد أن :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad . \quad (1.8.4)$$

ونحصل من المعادلة (1.8.2) على المعادلة :

$$-q_{i,i} = \rho \dot{U} - \sigma_{ij} \dot{e}_{ij} \quad . \quad (1.8.5)$$

وباستخدام معادلة الانتروبي والتي على الصورة :

$$q_{i,i} = -\rho T \dot{\eta} \quad . \quad (1.8.6)$$

حيث  $T$  درجة الحرارة المطلقة وتساوي  $T_0 + \theta$  و  $T_0$  تمثل درجة حرارة الجسم وهي ثابتة .

ومن المعادلتين (1.8.5) و (1.8.6) نجد أن :

$$\rho d\eta = \frac{\rho}{T} dU - \frac{1}{T} \sigma_{ij} de_{ij} \quad .$$

ويمكن كتابة المعادلة السابقة بشكل آخر بعد استخدام قاعدة السلسلة كما يلي :

$$\rho d\eta = \frac{\rho}{T} \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{1}{T} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} - \sigma_{ij} \right) de_{ij} \quad . \quad (1.8.7)$$

ومن القانون الثاني للديناميكا الحرارية فالمقدار  $d\eta$  لا بد أن يكون تفاضله كلية في  $T$  و  $e_{ij}$  وبذلك نحصل على :

$$\rho \frac{\partial \eta}{\partial T} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial U}{\partial T} \quad , \quad (1.8.8)$$

$$\rho \frac{\partial \eta}{\partial e_{ij}} = \frac{1}{T} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \quad . \quad (1.8.9)$$

ومن خواص التفاضل الجزئي للدوال المتصلة التالي :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial e_{ij}} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial e_{ij} \partial T} \quad .$$

وباستخدام الخاصية السابقة وبلاستعانة بالمعادلتين (1.8.8) - (1.8.9) مع المعادلة (1.8.1)

نحصل على التالي :

$$\frac{1}{T} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} - \sigma_{ij} \right) = \gamma_{ij} \quad . \quad (1.8.10)$$

وبالتعويض من المعادلة السابقة في المعادلة (1.8.7) نحصل على :

$$\rho d\eta = \frac{\rho}{T} \frac{\partial U}{\partial T} dT + \gamma_{ij} de_{ij} \quad . \quad (1.8.11)$$

وبفرض أن :

$$C_E = \frac{\partial U}{\partial T} \quad . \quad (1.8.12)$$

و  $C_E$  تمثل الحرارة النوعية لوحدة الكتل في غياب الانفعال وفي درجة حرارة قريبة جداً

من درجة حرارة الجسم  $T = T_0$  .

وبالتعويض من المعادلة (1.8.12) في المعادلة (1.8.11) وإجراء التكامل نصل إلى :

$$\rho \eta = \rho C_E \log T + \gamma_{ij} e_{ij} + \text{constant} \quad . \quad (1.8.13)$$

في المعادلة السابقة سوف نختار الثابت بحيث يجعل  $\eta = 0$  عندما  $T = T_0$  و  $e_{ij} = 0$

وبذلك تصبح المعادلة (1.8.13) على الصورة التالية :

$$\rho \eta = \rho C_E \log \left( 1 + \frac{\theta}{T_0} \right) + \gamma_{ij} e_{ij} \quad . \quad (1.8.14)$$

وبإيجاد مفكوك الدالة  $\log(1 + \frac{\theta}{T_0})$  كمتسلسلة قوى في المقدار  $\theta/T_0$  ، وإهمال

المقادير التي لها أس أكبر من واحد نحصل على :

$$\rho T_0 \eta = \rho C_E \theta + T_0 \gamma_{ij} e_{ij} \quad . \quad (1.8.15)$$

ويمكن وضع المعادلة (1.8.6) في الصورة الخطية كما يلي :

$$q_{i,i} = -\rho T_0 \dot{\eta} \quad (1.8.16)$$

ومن المعادلة (1.8.15) نحصل على :

$$q_{i,i} = -\rho C_E \dot{\theta} - T_0 \gamma_{ij} \dot{e}_{ij} \quad (1.8.17)$$

والآن سنفترض أن الصورة العامة لقانون فوريرير للتوصيل الحراري على الشكل التالي :

$$q_i + \tau_0 \dot{q}_i = -k_{ij} \theta_{,j} \quad (1.8.18)$$

حيث  $\tau_0$  هو الزمن الاسترخائي .

وبحساب التباعد للمعادلة السابقة والتعويض به في المعادلة (1.8.17) نصل إلى المعادلة:

$$\rho C_E (\dot{\theta} + \tau_0 \ddot{\theta}) + T_0 \gamma_{ij} (\dot{e}_{ij} + \tau_0 \ddot{e}_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (k_{ij} \theta_{,j}) \quad (1.8.19)$$

وحتى نحصل على معادلة تحققها مركبات الإزاحة  $u_i$  نعوض من المعادلة (1.8.1) في

المعادلة (1.1.3) وباستخدام تعريف الانفعال التالي :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.8.20)$$

نصل إلى المعادلة التالية :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} ( C_{ijkl} u_{k,l} ) - \frac{\partial}{\partial x_j} ( \gamma_{ij} \theta ) + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i . \quad (1.8.21)$$

وفي حالة الجسم المتماثل تأخذ المعادلتان (1.8.19) و (1.8.21) الشكل الآتي:

$$k T_{,ii} = \rho C_E ( \dot{T} + \tau_0 \ddot{T} ) + \gamma T_0 ( \dot{e}_{kk} + \tau_0 \ddot{e}_{kk} ) , \quad (1.8.22)$$

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda + \mu) u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} - \gamma T_{,i} + \rho F_i , \quad (1.8.23)$$

حيث

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu) \alpha_t .$$

وتكتمل المعادلات السابقة بمعادلة الإجهاد التالية :

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + (\lambda e_{kk} - \gamma \theta) \delta_{ij} . \quad (1.8.24)$$

والمعادلات الأساسية لنظرية المرونة الحرارية المعممة تتكون من المعادلتين (1.8.19)

و(1.8.21) للجسم غير المتماثل ، ومن المعادلتين (1.8.22) و (1.8.23) للجسم المتماثل.



## 9-1: مميزات نظرية المرونة الحرارية المعممة:

إن كل زوج من المعادلات الأساسية لنظرية المرونة الحرارية المعممة مرتبطة ، وهذا يعالج العيب الموجود في النظرية غير المرتبطة ، حيث أصبح للتأثير الحراري علاقة بالتأثير الميكانيكي . وكذلك فإن المعادلة الحرارية في هذه النظرية سواء كانت للجسم المتماثل أو غير المتماثل هي معادلة تفاضلية جزئية من النوع الزائدي ( Hyperbolic partial differential equation ) وحل هذا النوع من المعادلات يتنبأ بقيمة منتهية لسرعة تقدم الموجة الحرارية وبهذا تم علاج العيب الثاني الذي ظهر في النظريتين السابقتين وهو أن المعادلة الحرارية معادلة تفاضلية جزئية من النوع المكافئ ( parabolic partial differential equation ) ..

بداية من عمل كل من لورد و شولمان [8] (Lord and Shulman) في عام 1967م ، فإن الكثير من المؤلفين ساهموا في نظرية المرونة الحرارية المعممة ذات الزمن الاسترخائي الواحد . تم إثبات وحدانية الحل تحت شروط مختلفة على يد آيجناكزاك (Ignaczak) في [27] (Ignaczak) و [28] (Sherief)، و شريف وداليوال [29] (Sherief and Dhaliwal) و شريف [30] (Sherief) . طريقة فضاء الحالة تم تطويرها بواسطة كلا من أنور و شريف [31] (Anwar and Sherief) لمسألة في بعد واحد لوسط يحتوي على مصدر حراري و شريف [32] (Sherief) لعدة مسائل تحتوي على عدة مصادر حرارية . شريف و أنور [33] (Sherief and Anwar) قام بتطوير طريقة فضاء الحالة لمسألة في بعدين ، تم حل العديد من التطبيقات بواسطة أنور و شريف (Anwar and Sherief) في [34] و شريف [35] (Sherief) و شريف و أنور (Sherief and Anwar) [36]–[41] و شريف وعزت (Sherief and Ezzat) [42] و شريف و حمزة (Sherief and Hamza) [43] .

قام يوسف (Youssef) مع المغربي (El-Magraby) و عبد الباري (El-Bary) بحل العديد من التطبيقات على نظرية المرونة الحرارية المعممة ذات الزمن الاسترخائي الواحد وذات الزمنين الاسترخائيين [44]–[50] .

### 10-1 : نظرية المرونة الحرارية المعممة ذات درجتى حرارة:

#### Theory of two-temperature generalized thermoelasticity

قام شين وجورتن في عام 1968م [51] (Chen and Gurtin) بوضع نظرية للتوصيل الحراري للأجسام المرنة ، والتي تعتمد على نوعين مختلفين من درجات الحرارة الأولى تسمى درجة الحرارة الموصلة  $\varphi$  ، والثانية تسمى درجة الحرارة الديناميكية  $T$  .

في الحالات التي يكون فيها حالة الجسم مستقلة عن الزمن ، فإن الفرق بين درجة الحرارة الموصلة ودرجة الحرارة الديناميكية يتناسب مع الإمداد الحراري للجسم ، وفي عدم وجود الإمداد الحراري فإن الفرق بين درجتى الحرارة ينعدم .

وفي عام 1973م قام قارين و شين [52] ، [53] (Warren and Chen) بدراسة التقدم الموجي لوسط تحت ضوء نظرية المرونة الحرارية المرتبطة في حالة وجود درجتى حرارة للوسط و لم يحدث أي تطوير لهذه النظرية حتى عام 2006م ، حيث قام يوسف [12] (Youssef) باستنتاج المعادلات الحاكمة لوسط مرن تحت ضوء نظرية المرونة الحرارية

المعممة ذات الزمن الاسترخائي الواحد ، وفي وجود درجتى الحرارة السابق ذكرهما مع وضع و إثبات نظرية وحدانية الحل لهذه النظرية.

ويمكن إيجاد المعادلات الحاكمة لهذه النظرية بتعديل قانون فوريير للتوصيل الحراري في المعادلة (1.8.18) بحيث يصبح على الصورة التالية :

$$q_i + \tau_0 \dot{q}_i = -k_{ij} \varphi_{,j} \quad (1.10.1)$$

حيث  $k_{ij}$  يمثل معامل التوصيل الحراري ،  $\tau_0$  هو الزمن الاسترخائي ،  $\varphi$  وهي تمثل حرارة التوصيل في الوسط وتحقق العلاقة التالية :

$$\varphi - T = a \varphi_{,ii} \quad (1.10.2)$$

و  $a > 0$  يسمى معامل درجتى الحرارة (The two- temperature parameter)

ووفقا لهذا التعديل فإن معادلة الحرارة (1.8.19) تصبح على الشكل :

$$\rho C_E (\dot{\theta} + \tau_0 \ddot{\theta}) + T_0 \gamma_{ij} (\dot{e}_{ij} + \tau_0 \ddot{e}_{ij}) = \frac{\partial}{\partial X_i} (k_{ij} \varphi_{,j}) \quad (1.10.3)$$

ومعادلة الحركة (1.8.21) تبقى كما هي حيث أنها تعتمد على الحرارة الديناميكية وهي على الصورة التالية :

$$\frac{\partial}{\partial X_j} ( C_{ijkl} u_{k,l} ) - \frac{\partial}{\partial X_j} ( \gamma_{ij} \theta ) + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i . \quad (1.10.4)$$

$$\theta = T - T_0. \quad \text{حيث أن}$$

و في حالة الجسم المتماثل و المتجانس فإن المعادلات السابقة تأخذ الشكل التالي :

$$k \varphi_{,ii} = \rho C_E ( \dot{\theta} + \tau_0 \ddot{\theta} ) + \gamma T_0 ( \dot{e}_{kk} + \tau_0 \ddot{e}_{kk} ) , \quad (1.10.5)$$

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda + \mu) u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} - \gamma \theta_{,i} + \rho F_i , \quad (1.10.6)$$

حيث

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu) \alpha_t .$$

و كذلك المعادلة المكتملة للنظام و هي تمثل معادلة الإجهاد ، تعتمد أيضا على الحرارة

الديناميكية للوسط وتكون على الصورة التالية:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + (\lambda e_{kk} - \gamma \theta) \delta_{ij} . \quad (1.10.7)$$

ومن الأعمال التي أظهرت أهمية هذه النظرية أنها عالجت بعض نقط عدم الاتصال في

بعض الدوال مثل دالة الإجهاد و التي لم يكن لها تفسير فيزيائي محدد، قام يوسف مع اللهيبي

[54](Youssef and Al-Lehaibi) بدراسة جسم مرن يتبع هذه النظرية وذلك باستخدام طريقة

فضاء الحالة ومن خلال هذا التطبيق ظهر منحى توزيع دالة الإجهاد متصل دون وجود أي

قفزات. قام يوسف أيضا مع آخرين مثل الحربي و بسيوني في حل عدد من التطبيقات المختلفة على هذه النظرية وقام بعمل العديد من المقارنات بينها و بين النظريات السابقة و التي كانت تفترض وجود دالة حرارة واحده [57]-[55].

## الباب الثاني

المرونة الحرارية المعممة لجسم غير منتهي يحتوي على فجوة  
اسطوانية وخواصه متغيرة

**Generalized Thermoelasticity of an Infinite Body  
with a Cylindrical Cavity and Variable Material  
Properties**

## 1-2: مقدمة:

### Introduction

في هذا الباب، سيتم حل تطبيق لوسط مرن غير منتهي و يحتوي على فجوة أسطوانية حيث تتغير خواص هذا الوسط مع تغير الحرارة و ذلك في سياق نظرية المرونة الحرارية المعممة ذات الزمن الاسترخائي الواحد عندما يتأثر السطح الداخلي للفجوة بصدمة حرارية و صدمة ميكانيكية. سيتم استخدام محولات لابلاس لإيجاد الحل العام ومن ثم إيجاد معكوساته عددياً و ذلك باستخدام متسلسلة فوريير ثم عرض النتائج بيانياً ومناقشتها.

## 2-2: المعادلات الأساسية :

### The basic equations

معادلة الحرارة على الصورة التالية [58] :

$$\left( K T_{,i} \right)_{,i} = \left( 1 + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ \frac{K}{\kappa} \dot{T} + \gamma T_0 \dot{e} \right] . \quad (2.1)$$

معادلة الحركة على الصورة التالية :

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} . \quad (2.2)$$

والمعادلة التي تربط الإجهاد بالانفعال والحرارة على الصورة التالية :

$$\sigma_{ij} = 2 \mu e_{ij} + (\lambda e_{kk} - \gamma \theta) \delta_{ij} , \quad (2.3)$$

حيث :

$$\frac{|T - T_0|}{T_0} = \frac{\theta}{T_0} \ll 1 , \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) .$$

ولنفرض أن معاملات المادة على الصورة التالية [58]:

$$\lambda = \lambda_0 f(T) , \mu = \mu_0 f(T) , K = K_0 f(T) , \gamma = \gamma_0 f(T) . \quad (2.4)$$

حيث أن :

$\lambda_0 , \mu_0 , K_0 , \gamma_0$  كلها ثوابت ، و  $f(T)$  هي دالة غير بعدية لدرجة الحرارة .

وفي حالة درجة الحرارة المستقلة  $f(T) = 1$  .

وبالتعويض بمعاملات المادة التي في الصورة (2.4) في المعادلات (2.1) ، (2.2) ، (2.3) ،

نحصل على المعادلات التالية :

$$\sigma_{ij} = f(T) [ 2\mu_0 e_{ij} + (\lambda_0 e_{kk} - \gamma_0 \theta) \delta_{ij} ] , \quad (2.5)$$



$$\rho \ddot{u}_i = f(T) \left[ 2\mu_o e_{ij} + (\lambda_o e_{kk} - \gamma_o \theta) \delta_{ij} \right]_{,j} + f(T)_{,j} \left[ 2\mu_o e_{ij} + (\lambda_o e_{kk} - \gamma_o \theta) \delta_{ij} \right] , \quad (2.6)$$

و

$$\left[ K_o f(T) T_{,i} \right]_{,i} = \left( 1 + \tau_o \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ \frac{K_o f(T)}{\kappa} \dot{T} + \gamma_o T_o f(T) \dot{u}_{i,i} \right] . \quad (2.7)$$

## 2-3: صياغة المسألة :

### Problem formulation

نعتبر جسم مرن غير منتهي يحتوي على فجوة اسطوانية نصف قطرها  $R$  ويخضع لنظرية المرونة الحرارية المعممة ذات الزمن الاسترخائي الواحد عندما تكون معاملات المادة متغيرة مع الحرارة. ونفرض أيضاً أنه لا يوجد قوة حجمية خارجية أو مصدر حراري داخل الوسط ، وسنستخدم الإحداثيات الاسطوانية  $(r, \psi, Z)$  بحيث يكون محور  $Z$  ممتد على طول محور الاسطوانة. من التماثل والتناظر ، فإن المسألة أحادية البعد وتعتمد فقط على المسافة القطرية  $r$  والزمن  $t$  .

وبناءً على ذلك فإن مركبات متجه الإزاحة تكون على الشكل التالي :

$$u_r = u(r, t) , \quad u_\psi(r, t) = u_z(r, t) = 0 .$$

وسنفترض بأن الدالة  $f(T)$  معرفة على الصورة [58]:

$$f(T) = 1 - \alpha^* T .$$

حيث  $\alpha^*$  ثابت يسمى ( Empirical Material ) وهو قيمة متوسطة بين قيم المعاملات .

ولكي تكون المعادلات على صورة خطية علينا أن نأخذ في الحسبان الشرط

$$\left| \frac{T - T_0}{T_0} \right| \ll 1 , \text{ والذي يعطينا تقريبا للدالة } f(T) \text{ على الصورة التالية :}$$

$$f(T) \approx f(T_0) = 1 - \alpha^* T_0 .$$

وبناء على ذلك فإن معادلة الحرارة ستكون على الصورة :

$$\nabla^2 \theta = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \left[ \frac{\theta}{\kappa} + \frac{\gamma_0 T_0}{K_0} e \right] , \quad (2.8)$$

حيث :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} .$$

وكذلك معادلة الحركة تصبح على الشكل :

$$\rho \ddot{u} = f(T_0) \left[ (\lambda_0 + 2\mu_0) \frac{\partial e}{\partial r} - \gamma_0 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right] , \quad (2.9a)$$

حيث :

$$\mathbf{e} = \frac{1}{r} \frac{\partial (\mathbf{r} \mathbf{u})}{\partial r} . \quad (2.9b)$$

وعلاقات الإجهاد تُعطى بالصورة التالية :

$$\sigma_{rr} = f(T_0) \left[ 2\mu_0 \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda_0 e - \gamma_0 \theta \right] , \quad (2.10)$$

$$\sigma_{\psi\psi} = f(T_0) \left[ 2\mu_0 \frac{u}{r} + \lambda_0 e - \gamma_0 \theta \right] , \quad (2.11)$$

$$\sigma_{zz} = f(T_0) [\lambda_0 e - \gamma_0 \theta] , \quad (2.12)$$

$$\sigma_{zr} = \sigma_{\psi r} = \sigma_{\psi z} = 0 . \quad (2.13)$$

والآن سوف نستخدم المتغيرات غير البعدية لنلغي الوحدات من المعادلات وهي على

الصورة التالية [58] :

$$u' = \left( \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho} \right)^{1/2} \frac{u}{\kappa} , \quad r' = \left( \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho} \right)^{1/2} \frac{r}{\kappa} , \quad \tau'_0 = \left( \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho} \right) \frac{\tau_0}{\kappa} ,$$

$$t' = \left( \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho} \right) \frac{t}{\kappa} , \quad \sigma' = \frac{\sigma}{\mu_0} , \quad \theta' = \frac{\theta}{T_0} , \quad R' = \left( \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho} \right)^{1/2} \frac{R}{\kappa} .$$

حيث :

$$b = \frac{\gamma_o T_o}{\mu} , \quad g = \frac{\gamma_o \kappa}{K_o} , \quad \beta = \left( \frac{\lambda_o + 2\mu_o}{\mu_o} \right)^{1/2} , \quad a = \frac{b}{\beta^2} .$$

وباستخدام المتغيرات غير البعدية السابقة والتعويض بها في المعادلات السابقة من (2.8) إلى

(2.12) فإننا نحصل على :

$$\nabla^2 \theta = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \tau_o \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] [\theta + g e] , \quad (2.14)$$

$$f(T_o) [\nabla^2 e - a \nabla^2 \theta] = \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} , \quad (2.15)$$

$$\sigma_{rr} = f(T_o) \left[ \beta^2 \frac{\partial u}{\partial r} + (\beta^2 - 2) \frac{u}{r} - b \theta \right] , \quad (2.16)$$

$$\sigma_{\psi\psi} = f(T_o) \left[ (\beta^2 - 2) \frac{\partial u}{\partial r} + \beta^2 \frac{u}{r} - b \theta \right] , \quad (2.17)$$

$$\sigma_{zz} = f(T_o) [(\beta^2 - 2)e - b \theta] . \quad (2.18)$$

## 2-4: الصياغة في مجال تحويلات لابلاس :

### Formulation in the Laplace transforms domain

باستخدام محول لابلاس لطرفي المعادلات من (2.14) إلى (2.18) المعرف بالصورة:

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt .$$

نحصل على التالي :

$$\left[ \nabla^2 - (s + \tau_0 s^2) \right] \bar{\theta} = g (s + \tau_0 s^2) \bar{e} , \quad (2.19)$$

$$(\nabla^2 - \alpha s^2) \bar{e} = a \nabla^2 \bar{\theta} , \quad (2.20)$$

$$\alpha \bar{\sigma}_{rr} = \beta^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + (\beta^2 - 2) \frac{\bar{u}}{r} - b \bar{\theta} , \quad (2.21)$$

$$\alpha \bar{\sigma}_{\psi\psi} = (\beta^2 - 2) \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \beta^2 \frac{\bar{u}}{r} - b \bar{\theta} , \quad (2.22)$$

$$\alpha \bar{\sigma}_{zz} = (\beta^2 - 2) \bar{e} - b \bar{\theta} , \quad (2.23)$$

حيث :

$$\alpha = \frac{1}{1 - \alpha^* T_o} .$$

وبالتعويض بقيمة  $\bar{e}$  من (2.19) في (2.20) نحصل على المعادلة التالية :

$$\left[ \nabla^4 - \left[ \alpha s^2 + (1 + \varepsilon)(s + \tau_o s^2) \right] \nabla^2 + \alpha s^2 (s + \tau_o s^2) \right] \bar{\theta} = 0 , \quad (2.24)$$

حيث:

$$\varepsilon = a g .$$

وبطريقة مماثلة يمكن أن نستنتج أن  $\bar{e}$  تحقق المعادلة التالية :

$$\left[ \nabla^4 - \left[ \alpha s^2 + (1 + \varepsilon)(s + \tau_o s^2) \right] \nabla^2 + \alpha s^2 (s + \tau_o s^2) \right] \bar{e} = 0 . \quad (2.25)$$

وبحل المعادلتين (2.19) و(2.20) يمكن أن نحصل على الحل في الشكل التالي :

$$\bar{\theta} = \sum_{i=1}^2 A_i (p_i^2 - \alpha s^2) K_0(p_i r) , \quad (2.26)$$

$$\bar{e} = \sum_{i=1}^2 B_i K_0(p_i r) . \quad (2.27)$$

حيث  $K_0(\cdot)$  هي دالة بيسل المعدلة من النوع الثاني من الدرجة صفر .

و  $A_1, A_2, B_1, B_2$  كلها باراميترات تعتمد على البارميتر  $S$  لتحويل لابلاس و  
هي جذور المعادلة المميزة .  $\pm p_1, \pm p_2$

$$p^4 - [\alpha s^2 + (1 + \varepsilon)(s + \tau_0 s^2)] p^2 + \alpha s^2 (s + \tau_0 s^2) = 0 . \quad (2.28)$$

وبالتعويض بالمعادلتين (2.26) و (2.27) في المعادلة (2.20) فإننا نستطيع أن نحصل على  
قيمة الباراميترات  $B_i$  كما يلي :

$$B_i = a p_i^2 A_i \quad , \quad i = 1, 2 . \quad (2.29)$$

ولذلك تصبح المعادلة (2.27) بدلالة الباراميترات  $A_i$  كما في الشكل التالي :

$$\bar{e} = a \sum_{i=1}^2 A_i p_i^2 K_0(p_i r) . \quad (2.30)$$

وبالتعويض من المعادلة (2.30) في تحويل لابلاس في المعادلة (2.9b) ثم إجراء التكامل

بالنسبة لـ  $r$  نحصل على :

$$\bar{u} = -a \sum_{i=1}^2 A_i p_i K_1(p_i r) . \quad (2.31)$$

حيث  $K_1(.)$  دالة بيسل المعدلة من النوع الثاني من الدرجة الأولى .

وفي خطوات استنتاج المعادلة (2.31) استعملنا العلاقة المشهورة لدالة بيسل :

$$\int z K_0(z) dz = -z K_1(z) .$$

نعوض بالمعادلتين (2.26) و (2.31) في المعادلات من (2.21) - (2.23) نحصل على :

$$\alpha \bar{\sigma}_{rr} = a \sum_{i=1}^2 A_i \left[ \beta^2 s^2 \alpha K_0(p_i r) + \frac{2}{r} p_i K_1(p_i r) \right] , \quad (2.32)$$

$$\alpha \bar{\sigma}_{\psi\psi} = a \sum_{i=1}^2 A_i \left[ (\beta^2 s^2 \alpha - 2p_i^2) K_0(p_i r) - \frac{2}{r} p_i K_1(p_i r) \right] , \quad (2.33)$$

$$\alpha \bar{\sigma}_{zz} = a \sum_{i=1}^2 (\beta^2 s^2 \alpha - 2p_i^2) A_i K_0(p_i r) . \quad (2.34)$$

ولتعيين البارامترات المجهولة نستخدم الشروط الحدية على السطح الداخلي  $r = R$  ونعطى

كامل يلي:-

$$(1) \quad \underline{\text{الشروط الحدي الحراري}} :$$

### **Thermal boundary condition**

نفرض أن السطح الداخلي  $r = R$  تعرض لصدمة حرارية على الشكل التالي :

$$\theta(R, t) = \theta_0 H(t) .$$

حيث  $H(t)$  دالة هيفيسيد ذات الخطوة الواحدة (Heaviside unit step function) وتعرف

كالاتي :



$$H(t) = \begin{cases} 1 & H(t) > 0 \\ 0 & H(t) < 0 \end{cases}$$

وباستخدام تحويل لابلاس نحصل على :

$$\bar{\theta}(R, s) = \frac{\theta_o}{s} . \quad (2.35)$$

(2) - الشرط الحدي الميكانيكي :

### Mechanical boundary condition

نفرض أن السطح الداخلي  $r = R$  تعرض لصدمة ميكانيكية في الشكل :

$$\sigma_{rr}(R, t) = \sigma_o H(t) .$$

وباستخدام تحويل لابلاس نحصل على :

$$\bar{\sigma}_{rr}(R, s) = \frac{\sigma_o}{s} . \quad (2.36)$$

وباستخدام المعادلات (2.26) ، (2.32) ، (2.35) ، (2.36) فإنها تعطينا نظام خطي من

المعادلات الجبرية في الباراميتريين المجهولين  $A_1$  ،  $A_2$  .

$$\sum_{i=1}^2 (p_i^2 - s^2 \alpha) K_0(p_i R) A_i = \frac{\theta_o}{s} , \quad (2.37)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[ \beta^2 s^2 \alpha K_0(p_i R) + \frac{2 p_i}{R} K_1(p_i R) \right] A_i = \frac{\alpha \sigma_0}{a s} . \quad (2.38)$$

وبحل نظام المعادلات السابق نحصل على الحل الكامل في مجال تحويل لابلاس .

## 2-5: معكوس تحويلات لابلاس:

### Inversion of Laplace transforms

لإيجاد محول لابلاس العكسي سوف نستخدم طريقة عددية تعتمد على مفكوك

متسلسلة فوريير [59].

بهذه الطريقة فإن الدالة  $f(t)$  تمثل التحويل العكسي للدالة  $\bar{f}(s)$  والتي يمكن تقريبها كما يلي:

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{t_1} \left[ \frac{1}{2} \bar{f}(c) + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^N \bar{f} \left( c + \frac{ik\pi}{t_1} \right) \exp \left( \frac{ik\pi t}{t_1} \right) \right] , \quad 0 < t_1 < 2t.$$

حيث  $N$  عدد صحيح كبير بما فيه الكفاية ، وهو يُمثل عدد الحدود المأخوذة من متسلسلة

فوريير. وحيث أن  $\varepsilon_1$  يمثل عدداً موجباً صغيراً ويعبر عن درجة الدقة المطلوبة في

التقريب، بحيث تحقق الشرط الآتي:

$$\exp(ct) \operatorname{Re} \left[ \bar{f} \left( c + \frac{iN\pi}{t_1} \right) \exp \left( \frac{iN\pi t}{t_1} \right) \right] \leq \varepsilon_1.$$

البارامتر  $c$  بارامتر حر موجب أكبر من الجزء الحقيقي لكلّ النقاط الشاذة في الدالة  $\bar{f}(s)$  والخيار الأمثل لهذا البارامتر حُصِلَ عليه طبقاً لبعض المعايير الموجود في [59]. وقد تم استخدام لغة الفورتران FORTRAN لإيجاد الحل العددي لمعكوس لابلاس.

## 6-2 : النتائج العددية ومناقشتها

### Numerical results and discussion

لقد تم اختيار مادة النحاس للحصول على النتائج العددية حيث تكون قيم

البارامترات والثوابت التي تمثل خواصه كما يلي [58]:-

$$K_o = 386 \text{ N/K sec}, \quad \alpha_T = 1.78 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \quad C_E = 383.1 \text{ m}^2 / \text{K},$$

$$\eta = 8886.73 \text{ m/sec}^2, \quad \mu = 3.86 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad \lambda = 7.76 \times 10^{10} \text{ N/m}^2,$$

$$\rho = 8954 \text{ kg/m}^3, \quad \tau_o = 0.02 \text{ sec}, \quad T_o = 293 \text{ K}, \quad K_1 = -0.1 \text{ K}^{-1}, \quad \varepsilon_1 = 1.618, \quad \beta^2 = 4,$$

$$a = 0.01041.$$

كما تم حساب كل البيانات العددية عند الزمن  $t=0.15$  ، وقيمة شدتي الحرارة و

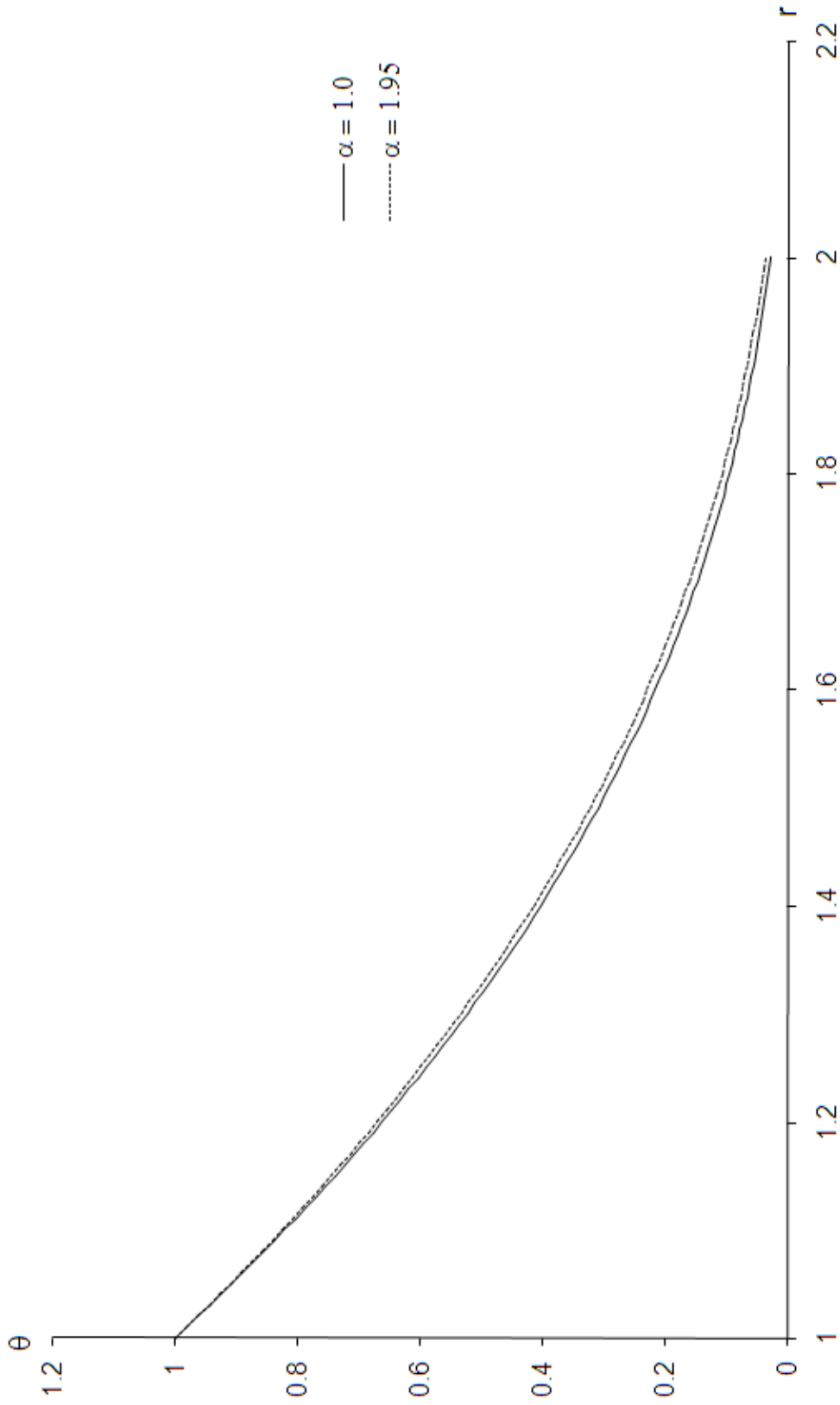
الإجهاد المؤثرتان على السطح هما على الترتيب  $\theta_o = 1$  و  $\sigma_o = -1$  و من ثم تم التمثيل

البياني لكل من الحرارة و الإجهاد و الإزاحة بقيمة  $\alpha = 1$  و التي تعني الحالة السابقة و هي

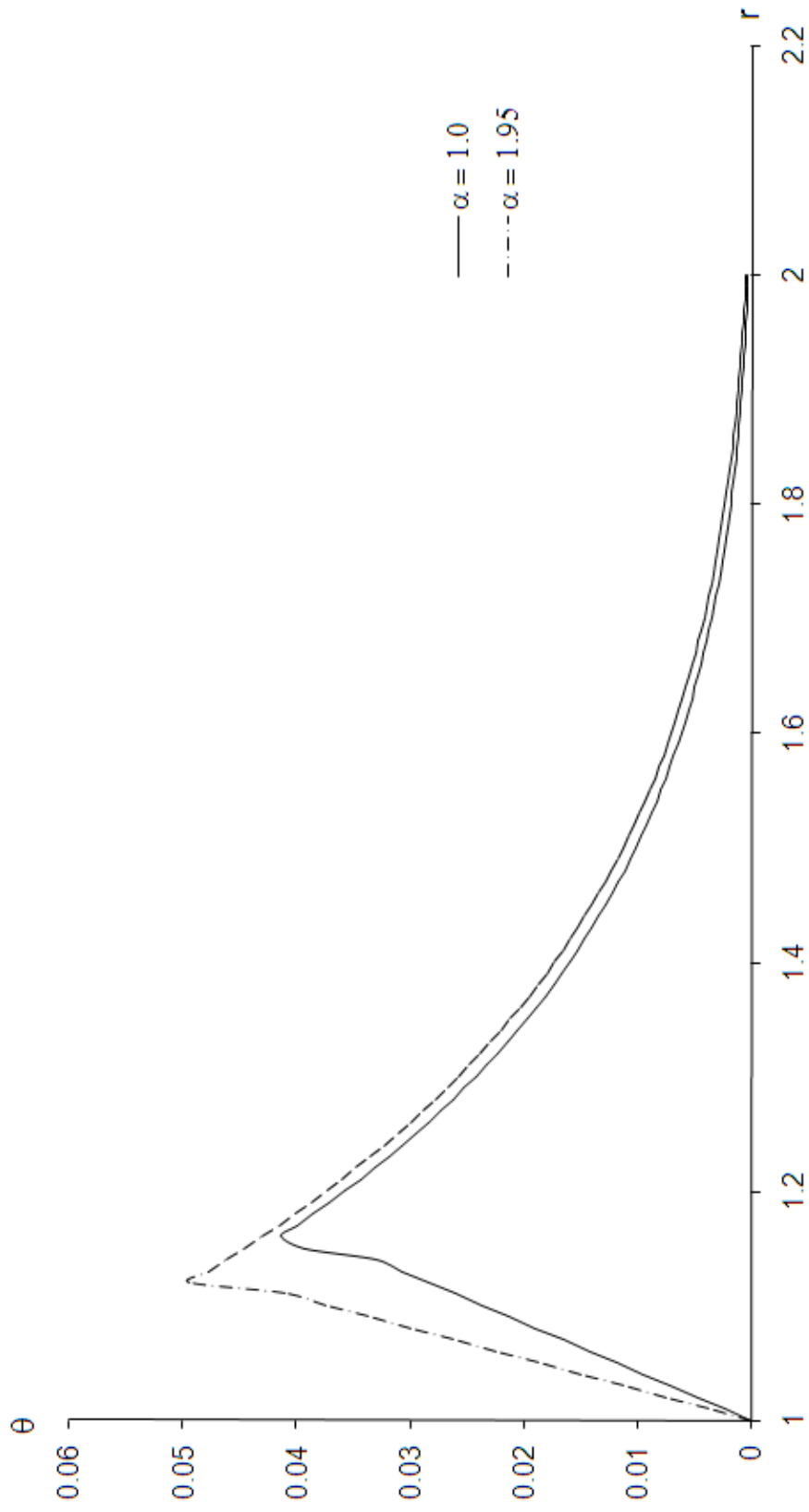
ثبوت خواص الوسط و القيمة  $\alpha=1.95$  و التي تعني الحالة الجديدة و هي تغير خواص الوسط.

الرسومات من 1-9 توضح مدى تأثير قيمة الثابت  $\alpha$  في كل مجالات الدراسة وفي الحالات المختلفة مثل وجود صدمة حرارية فقط أو وجود صدمة ميكانيكية فقط أو الاثنتين معاً وهذا ما يجعلنا نهتم في ما بعد بأن نأخذ في الاعتبار تغير خواص الوسط المرن مع تغير الحرارة في بناء أي نموذج رياضي يعتمد على دراسة الأوساط المرنة.

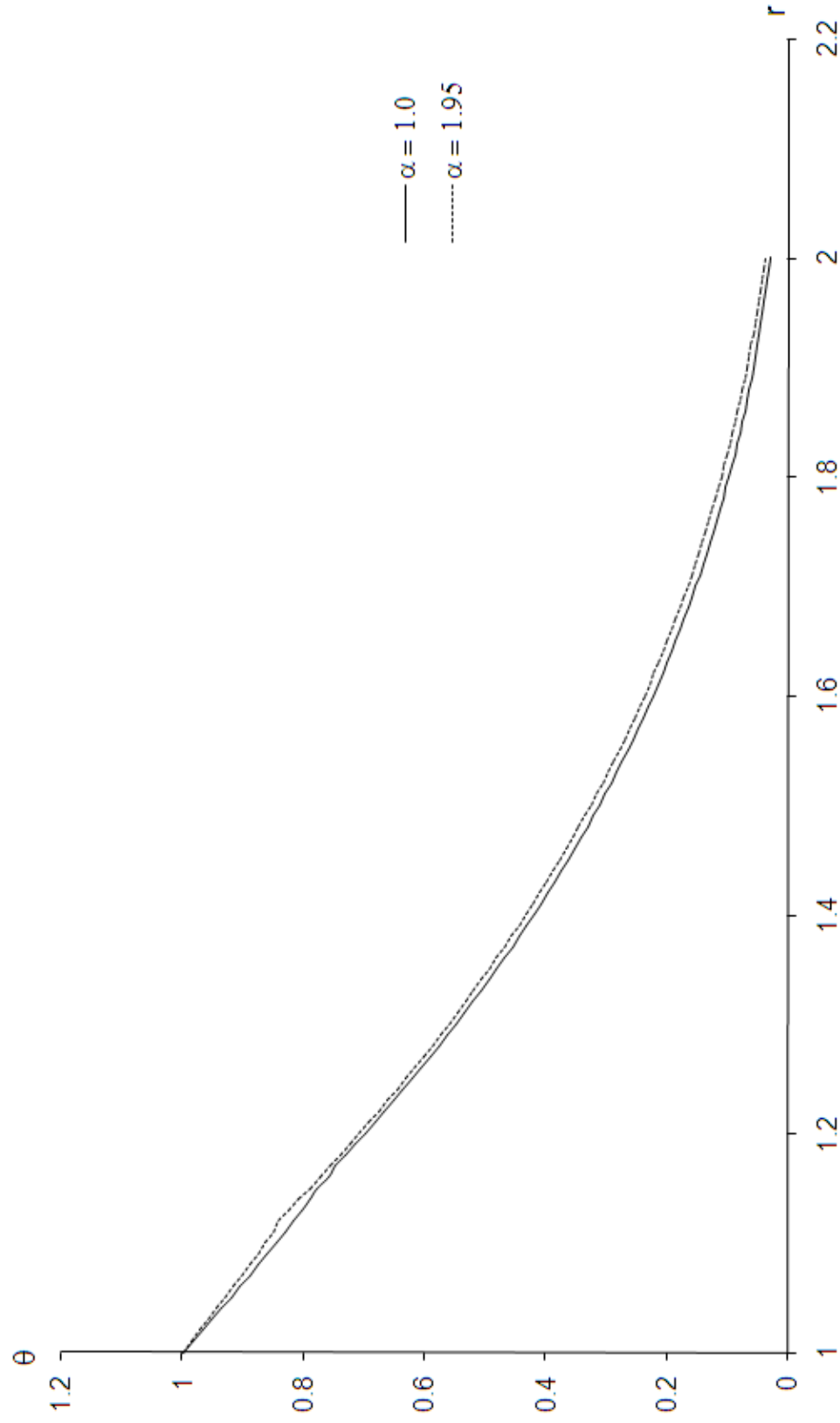
ففي الرسومات (1-2) - (3-2) نجد أن قيمة الحرارة في حالة زيادة البارامتر  $\alpha$  تزداد كما نلاحظ أيضاً وجود تأثير واضح له في قيم دالة الإزاحة ودالة الإجهاد ويتضح ذلك في الرسومات (4-2) - (9-2) ، كما نجد أيضاً أن مكان القفزة ( نقطة عدم الاتصال ) في دالة الإجهاد تتغير قيمتها ومكانها طبقاً لتغير البارامتر  $\alpha$  .



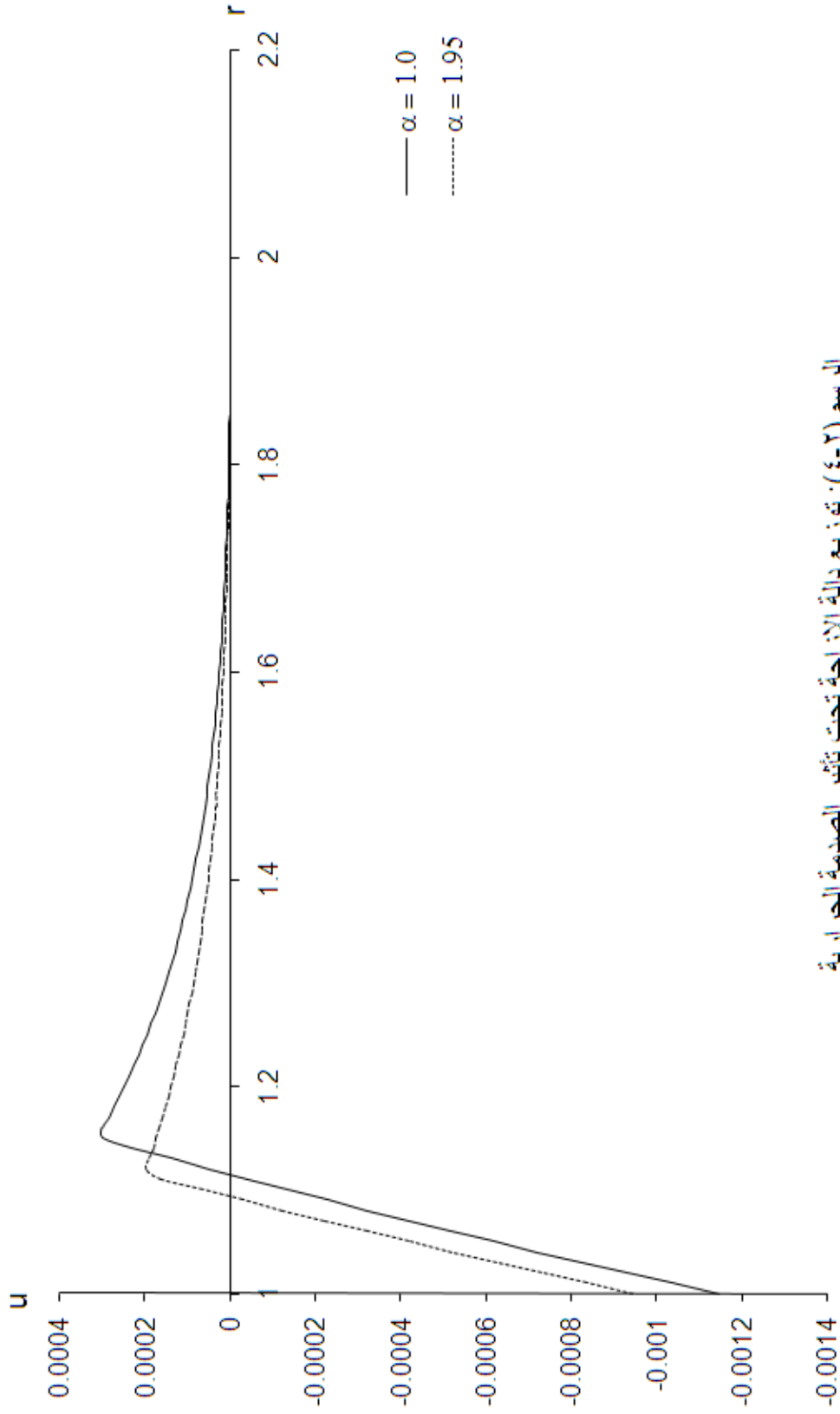
الرسم (١-٢): توزيع دالة الحرارة تحت تأثير الصدمة الحرارية



الرسم (٢-٢): توزيع دالة الحرارة تحت تأثير الصدمة الميكانيكية

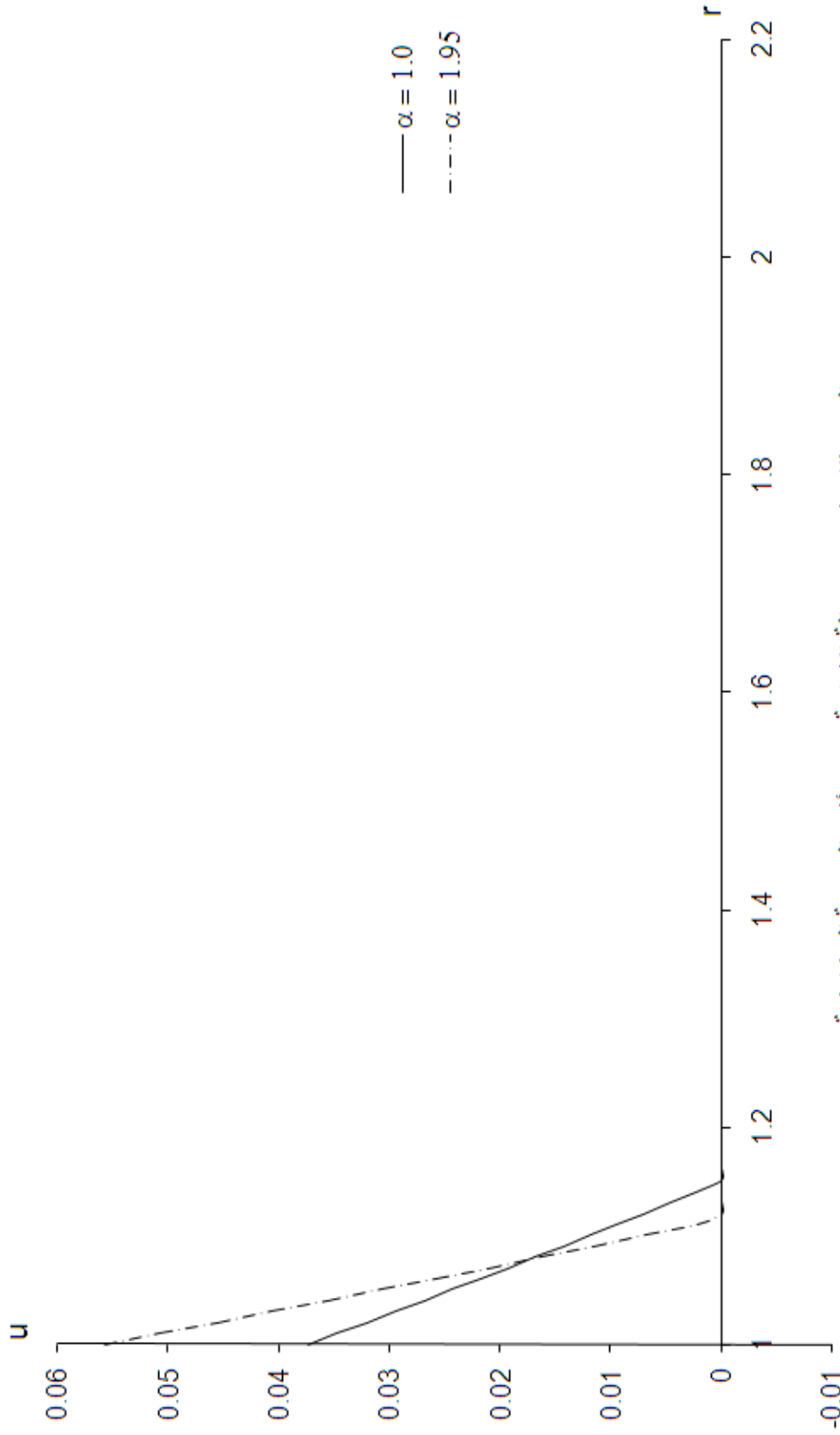


الرسم (٣-٢): توزيع دالة الحرارة تحت تأثير الصدمة الحرارية و الميكانيكية

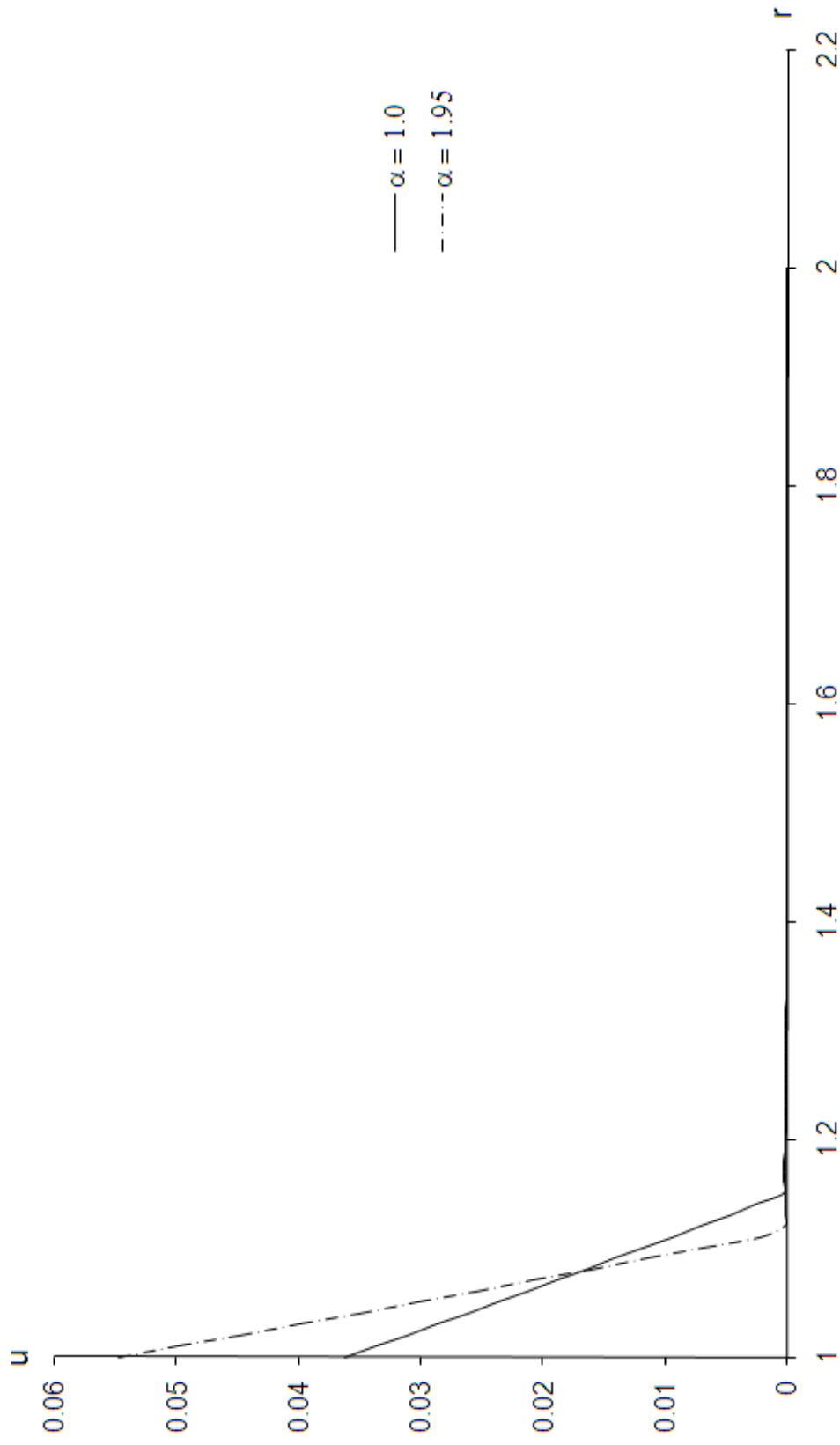


الرسم (٤-٢): توزيع دالة الازاحة تحت تأثير الصدمة الحرارية

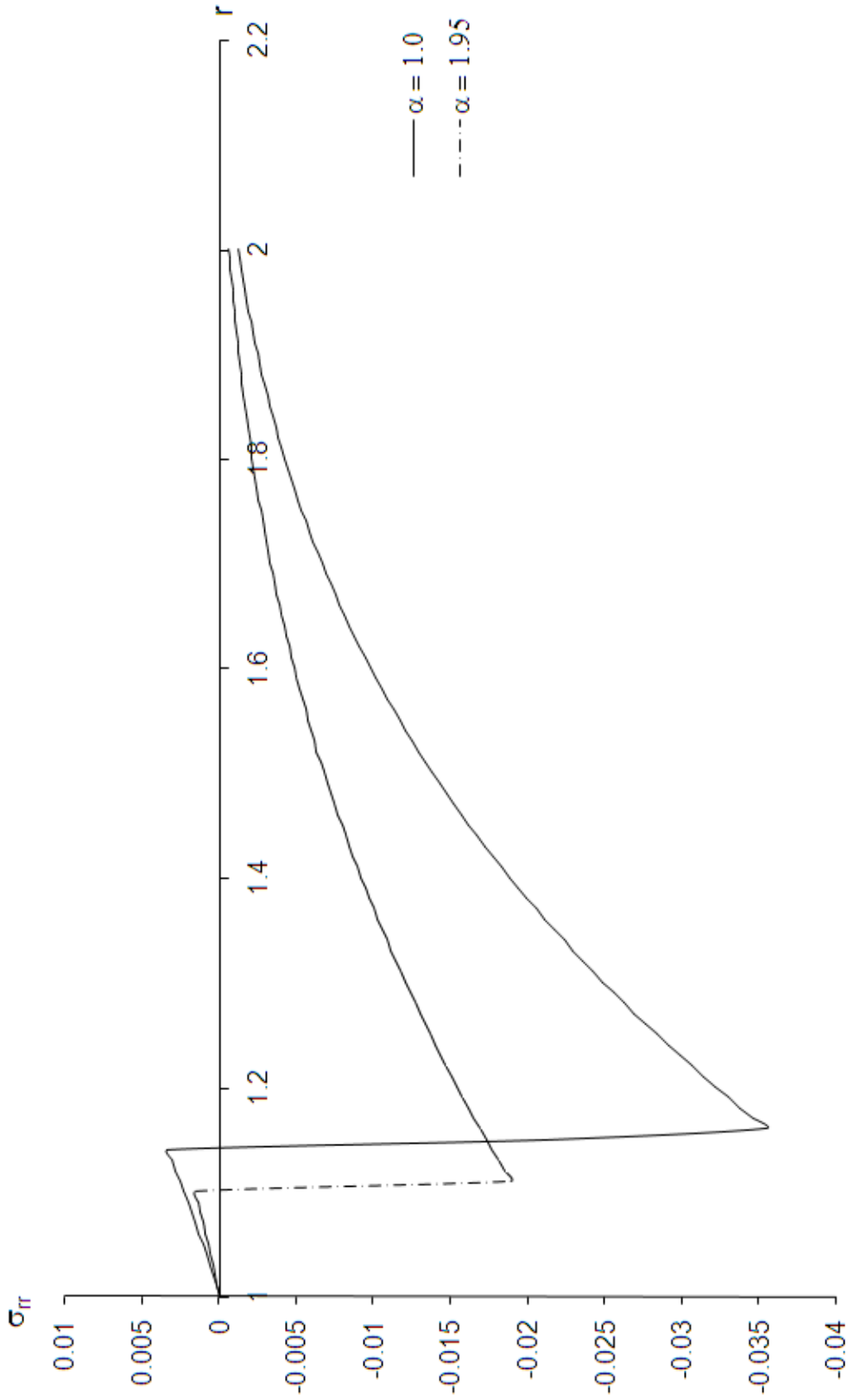




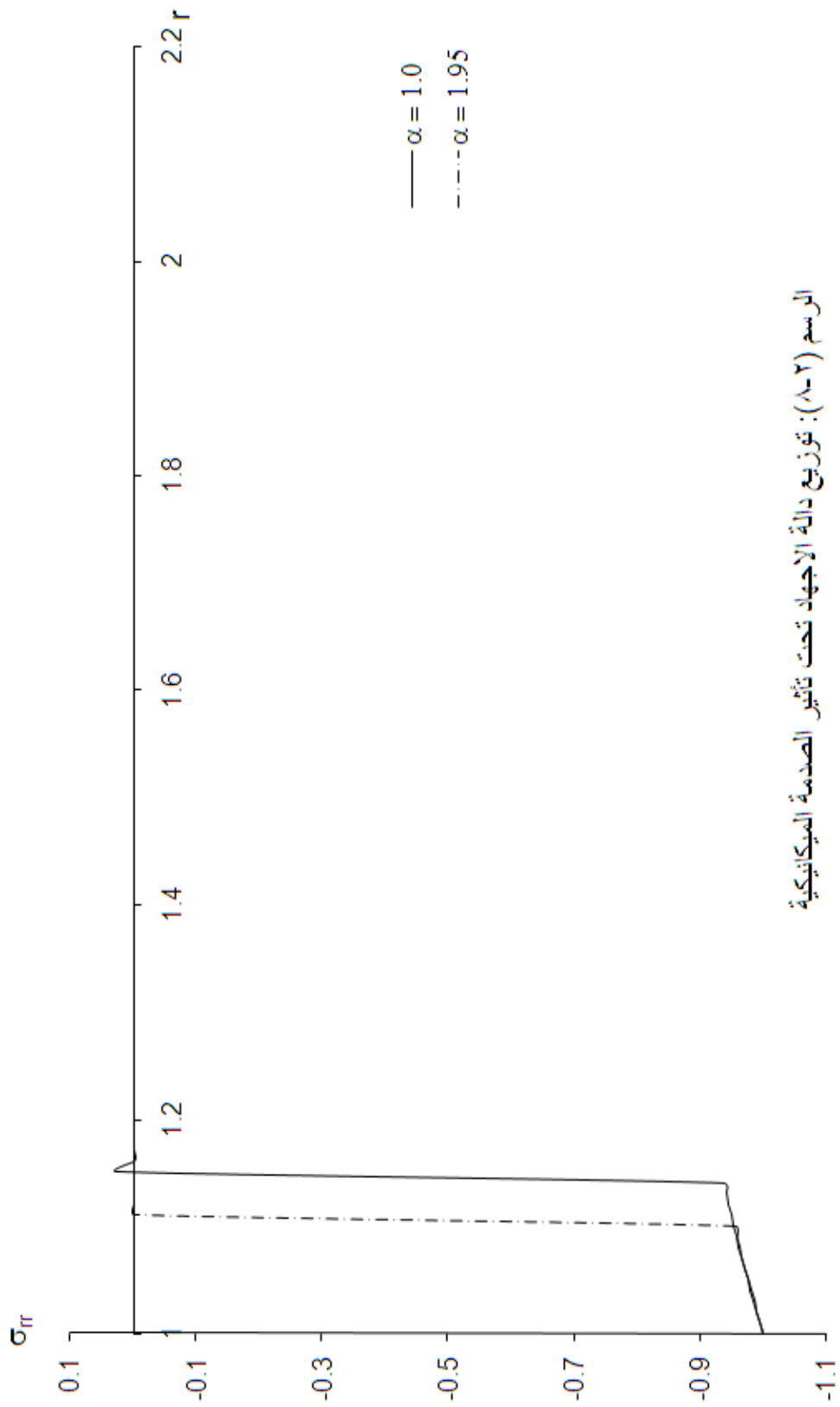
الرسم (٥-٢): توزيع دالة الراحة تحت تأثير الصدمة الميكانيكية



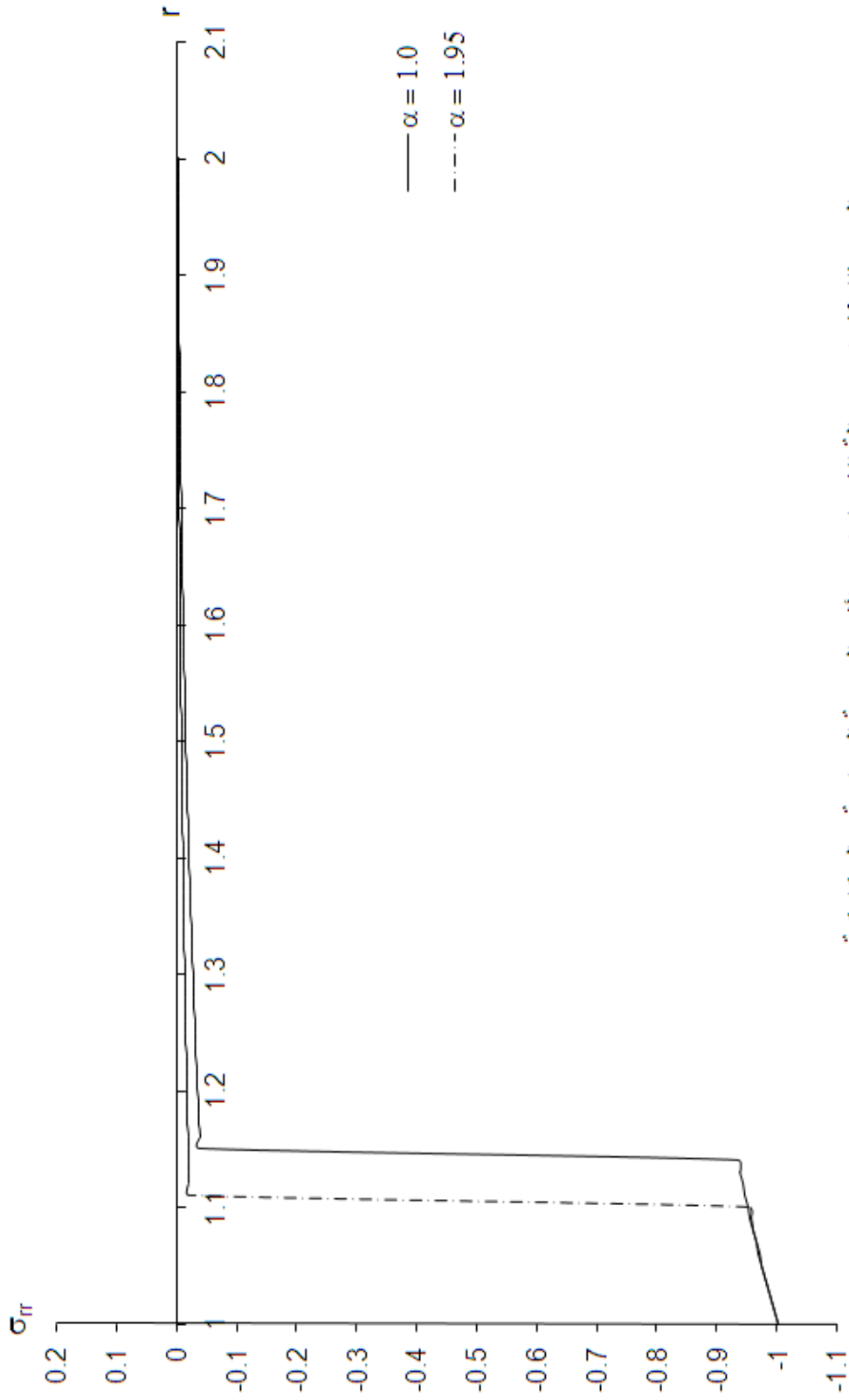
الرسم (٦-٢): توزيع دالة الازاحة تحت تأثير الصدمة الحرارية و الميكانيكية



الرسم (٧-٢): توزيع دالة الإجهاد القطري تحت تأثير الصدمة الحرارية



الرسم (٨-٢): توزيع دالة الإجهاد تحت تأثير الصدمة الميكانيكية



الرسم (٩-٢): توزيع دالة الاجهاد تحت تأثير الصدمة الحرارية و الميكانيكية

## الباب الثالث

نظرية المرونة الحرارية المعممة ذات درجتى حرارة عندما

يكون معامل التوصيل الحراري متغيراً

**TWO-TEMPERATURE GENERALIZED  
THERMOELASTICITY WITH  
VARIABLE THERMAL CONDUCTIVITY**

### 3-1: مقدمة :

#### Introduction

في هذا الباب سيتم استخدام إحدى نظريات المرونة الحرارية الحديثة و التي ظهرت في عام 2006 و التي تسمى نظرية المرونة الحرارية المعممة ذات درجتي حرارة و التي سبق التحدث عنها في الباب الأول. سيكون هذا الباب بمثابة مقارنة بين نتائج هذه النظرية و النظريات السابقة و التي كانت تعتمد على درجة حرارة واحدة للوسط وذلك من خلال بناء نموذج رياضي لوسط مرن خامل وخالٍ من أي قوة حجمية خارجية ومن أي مصدر حراري داخلي وكل معاملات الوسط مثل معاملات المرونة و معامل التمدد الحراري ثابتة ولكن معامل التوصيل الحراري متغير بدالة خطية مع درجة حرارة الوسط.

### 3-2: المعادلات الحاكمة :

#### The governing equations

إن المعادلات الحاكمة في هذه الحالة تأخذ الأشكال التالية [45]:

معادلة الحرارة تأخذ الشكل التالي :

$$\left( K \varphi_{,i} \right)_{,i} = \left( 1 + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ \frac{K}{\kappa} \dot{\theta} + \gamma T_0 \dot{e} \right], \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

حيث  $K$  متغير ،  $\kappa$  معامل الانتشارية الحرارية ،  $\theta$  الحرارة الديناميكية ،  $\gamma$  معامل التوصيل الحراري ،  $e$  الانفعال و  $T_0$  درجة حرارة الغرفة .

حيث أن :  $|T - T_o| = \theta$  .

والعلاقة بين درجة الحرارة الموصلة  $\varphi$  ودرجة الحرارة الديناميكية  $\theta$  تتحدد بالمعادلة التالية :

$$\varphi - \theta = a\varphi_{,ii} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad . \quad (3.2)$$

حيث أن  $a \geq 0$  باراميتر .

وسنفترض أن معامل التوصيل الحراري  $K$  متغير ويُعبر عنه بدالة خطية في درجة الحرارة الديناميكية أي يمكن كتابته على هيئة دالة خطية في درجة الحرارة الديناميكية على الشكل التالي [45] :

$$K(\theta) = K_o (1 + K_1 \theta) \quad . \quad (3.3)$$

حيث  $K_o$  ثابت ويساوي معامل التوصيل الحراري للمادة عندما لا يعتمد على  $\theta$  و  $K_1 \leq 0$  باراميتر صغير جداً .

وبالتعويض من المعادلة (3.2) في المعادلة (3.3) فإننا نحصل على :

$$K(\theta) = K_o [1 + K_1 \varphi - aK_1 \varphi_{,ii}] \quad ,$$

وبما أن  $a$  معامل درجتي الحرارة وهو صغير جداً و  $K_1$  أيضاً فإننا بذلك يمكننا إهمال المقدار  $(aK_1 \varphi_{,ii})$  لصغر قيمته ، لذلك نحصل على :



$$K(\theta) = K_o (1 + K_1 \varphi) . \quad (3.4)$$

وأيضاً من (3.3) نستطيع كتابة  $K$  بدلالة درجة الحرارة الموصلة على الشكل التالي :

$$K(\varphi) = K_o (1 + K_1 \varphi) . \quad (3.5)$$

ومن (3.4) و (3.5) نجد أن :

$$K(\varphi) = K(\theta) .$$

بفرض الراسمان:

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{K_o} \int_0^{\varphi} K(\xi) d\xi , \quad (3.6)$$

و

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{K_o} \int_0^{\theta} K(\xi) d\xi . \quad (3.7)$$

وباشتقاق المعادلة (3.6) بالنسبة لـ  $X_i$  فإننا نحصل على :

$$K_o \tilde{\varphi}_{,i} = K(\varphi) \varphi_{,i} , \quad (3.8)$$

وباشتقاق المعادلة السابقة مرة أخرى بالنسبة لـ  $X_i$  نحصل على :

$$K_o \tilde{\varphi}_{,ii} = [K(\varphi) \varphi_{,i}]_{,i} , \quad (3.9)$$

بالمثل عند اشتقاق المعادلة (3.7) بالنسبة لـ  $X_i$  نحصل على :

$$k_o \tilde{\theta}_{,i} = k(\theta) \theta_{,i} \quad , \quad (3.10)$$

وباشتقاق المعادلة (3.7) مرة أخرى بالنسبة لـ  $t$  نحصل على :

$$k_o \dot{\tilde{\theta}} = k(\theta) \dot{\theta} \quad , \quad (3.11)$$

وبالتعويض بالمعادلات (3.9) و(3.11) في (3.1) نحصل على :

$$\tilde{\Phi}_{,ii} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \tau_o \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left[ \frac{1}{\kappa} \tilde{\theta} + \frac{\gamma T_o}{K_o} e \right] \quad . \quad (3.12)$$

معادلة الحركة تُعطى على الشكل التالي:

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} - \gamma \theta_{,i} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad . \quad (3.13)$$

وباستخدام المعادلة (3.10) نحصل على :

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} - \frac{\gamma K_o}{K(\theta)} \tilde{\theta}_{,i} \quad , \quad (3.14)$$

ولكي تكون المعادلة في الصورة الخطية سوف نستخدم التقريب  $\frac{K_o}{K(\theta)} \approx 1$  وبناءً على ذلك

سوف تصبح المعادلة الأخيرة على الصورة [45]:

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} - \gamma \tilde{\theta}_{,i} . \quad (3.15)$$

العلاقة بين الإجهاد والانفعال تُعطى بالمعادلة التالية :

$$\sigma_{ij} = 2 \mu e_{ij} + (\lambda e_{kk} - \gamma \theta) \delta_{ij} , \quad i=1,2,3 . \quad (3.16)$$

الآن ، لتغيير المعادلة (3.2) باستعمال التعويضات أو التعريفات الموضحة في المعادلتين (3.6) و (3.7) سنتبع طريقة أخرى كما يلي:

أولاً تفاضل المعادلة (3.2) بالنسبة لـ  $x_i$  وبعد ذلك ضربها في  $K$  وبذلك نحصل على

$$K(\varphi)\varphi_{,i} - K(\theta)\theta_{,i} = a K(\varphi)\varphi_{,iii} , \quad i=1,2,3 . \quad (3.17)$$

وبالتعويض بالمعادلات (3.8)–(3.10) في (3.17) نحصل على :

$$K_o \tilde{\varphi}_{,i} - K_o \tilde{\theta}_{,i} = a K(\varphi)\varphi_{,iii} , \quad i=1,2,3 . \quad (3.18)$$

ومن المعادلة (3.9) نحصل على :

$$K_o \tilde{\varphi}_{,ii} = [K(\varphi)\varphi_{,i}]_{,i} = [K_o(1+K_1\varphi)\varphi_{,i}]_{,i} , \quad i=1,2,3 . \quad (3.19)$$

والتي تعطينا بعد التفاضل المعادلة التالية :

$$K_o \tilde{\varphi}_{,iii} = 3K_o K_1 \varphi_{,i} \varphi_{,ii} + K(\varphi)\varphi_{,iii} , \quad i=1,2,3 . \quad (3.20)$$

وبإهمال المقدار غير الخطي  $3K_0 K_1 \varphi_i \varphi_{,ii}$  حيث أنه مقدار صغير جداً ، تصبح المعادلة على الشكل التالي :

$$K_0 \tilde{\varphi}_{,iii} = K(\varphi) \varphi_{,iii} , \quad i = 1, 2, 3 . \quad (3.21)$$

وبالتعويض من المعادلة (3.21) في المعادلة (3.18) نحصل على :

$$\tilde{\varphi}_{,i} - \tilde{\theta}_{,i} = a \tilde{\varphi}_{,iii} , \quad i = 1, 2, 3 . \quad (3.22)$$

وفي النهاية نحصل على :

$$\tilde{\varphi} - \tilde{\theta} = a \tilde{\varphi}_{,ii} , \quad i = 1, 2, 3 . \quad (3.23)$$

### 3-3: صياغة المسألة :

#### Formulation of the problem

نفرض أن لدينا نصف فراغ شامل ممتد  $(0 \leq x < \infty)$  مع محور  $x$  حيث يُشير إلى الوسط، بحيث يخضع السطح  $(x = 0)$  ويتعرض إلى تحميل حراري و ميكانيكي . كما أن دوال الحالة ستعتمد فقط على الزمن  $t$  والمسافة  $x$  .  
وعندها مركبات الإزاحة ستأخذ الشكل التالي :

$$(u_x, u_y, u_z) = (u(x, t), 0, 0) , \quad (3.24)$$

حيث

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} . \quad (3.25)$$

معادلة الحرارة في (3.12) تصبح على الشكل التالي :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left[ \frac{1}{\kappa} \tilde{\theta} + \frac{\gamma \Gamma_0}{K_0} \frac{\partial u}{\partial x} \right] , \quad (3.26)$$

ومعادلة الحركة (3.15) يمكن أن تكتب على الشكل :

$$\rho \ddot{u} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} , \quad (3.27)$$

والمعادلة التي تحدد العلاقة بين الإجهاد والانفعال تأخذ الشكل التالي:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \theta , \quad (3.28)$$

والمعادلة (3.2) بعد إهمال شروط القيمة الصغيرة تأخذ الشكل :

$$\tilde{\varphi} - \tilde{\theta} = a \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} . \quad (3.29)$$

وللتبسيط سنستعمل المتغيرات غير البعدية التالية :

$$x' = \frac{c_0}{\kappa} x \quad u' = \frac{c_0}{\kappa} u \quad , \quad t' = \frac{c_0^2}{\kappa} t \quad , \quad \tau'_0 = \frac{c_0^2}{\kappa} \tau_0 \quad , \quad \sigma' = \frac{\sigma}{\lambda + 2\mu} \quad , \quad \tilde{\varphi}' = \frac{\tilde{\varphi}}{T_0}$$

$$c_0^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad , \quad \tilde{\theta}' = \frac{\tilde{\theta}}{T_0} \quad , \quad \theta' = \frac{\theta}{T_0} .$$

وبالتعويض بالمتغيرات غير البعدية السابقة في المعادلات (3.26)،(3.27)،(3.28) و (3.29)

نحصل على :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left[ \tilde{\theta} + \varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad , \quad (3.30)$$

$$\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon_2 \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} \quad , \quad (3.31)$$

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_2 \theta \quad , \quad (3.32)$$

و

$$\tilde{\varphi} - \tilde{\theta} = \beta \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} . \quad (3.33)$$

حيث أن :

$$\beta = \frac{ac_o^2}{\kappa^2} \quad , \quad \varepsilon_2 = \frac{\gamma T_o}{(\lambda + 2\mu)} \quad , \quad \varepsilon_1 = \frac{\gamma \kappa}{K_o} \quad .$$

سوف نستخدم تحويل لابلاس المعروف كالتالي :

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad .$$

وبأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلات (3.30)-(3.33) فإننا نحصل على :

$$\frac{d^2 \bar{\tilde{\varphi}}}{dx^2} = (s + \tau_o s^2) \left[ \bar{\tilde{\theta}} + \varepsilon_1 \bar{e} \right] \quad , \quad (3.34)$$

$$\frac{d^2 \bar{e}}{dx^2} = s^2 \bar{e} + \varepsilon_2 \frac{d^2 \bar{\tilde{\theta}}}{dx^2} \quad , \quad (3.35)$$

$$\bar{\sigma} = \bar{e} - \varepsilon_2 \bar{\tilde{\theta}} \quad , \quad (3.36)$$

$$\bar{\tilde{\varphi}} - \bar{\tilde{\theta}} = \beta \frac{d^2 \bar{\tilde{\varphi}}}{dx^2} \quad . \quad (3.37)$$

وبحذف  $\bar{\tilde{\theta}}$  من المعادلات أعلاها ، نحصل على :

$$\frac{d^2 \bar{\tilde{\varphi}}}{dx^2} = \alpha_1 \bar{\tilde{\varphi}} + \varepsilon_1 \alpha_1 \bar{e} \quad , \quad (3.38)$$

$$\frac{d^2 \bar{e}}{d x^2} = \alpha_2 \bar{\phi} + \alpha_3 \bar{e} \quad , \quad (3.39)$$

حيث أن:

$$\alpha_1 = \frac{s + \tau_0 s^2}{[1 + \beta(s + \tau_0 s^2)]} , \alpha_2 = \frac{\alpha_1 \varepsilon_2 (1 - \beta \alpha_1)}{[1 + \beta \alpha_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2]} , \alpha_3 = \frac{s^2 + \alpha_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 - \beta \alpha_1)}{[1 + \beta \alpha_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2]} .$$

### 3-4: طريقة فضاء الحالة:

#### State-space method

باختيار كلا من درجة الحرارة الموصلة  $\bar{\phi}$  و مركبات الانفعال  $\bar{e}$  كمتغيرات حالة ، في اتجاه البعد X فإن المعادلات (3.38) و (3.39) يمكن أن تُكتب بطريقة المصفوفة كالتالي [60]:

$$\frac{d^2 \bar{V}(x, s)}{d x^2} = A(s) \bar{V}(x, s) \quad . \quad (3.40)$$

حيث:

$$V(x, s) = \begin{bmatrix} \bar{\phi}(x, s) \\ \bar{e}(x, s) \end{bmatrix} , \quad A(s) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \varepsilon_1 \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} .$$



والحل العام للنظام (3.40) يمكن أن يُكتب في الشكل التالي :

$$\bar{V}(x, s) = \exp[-\sqrt{A(s)} x] \bar{V}(0, s) . \quad (3.41)$$

وحتى يكون الحل محدود لقيم  $x$  غير المنتهية تم إهمال الجزء الأسّي الذي له قوة أسية موجبة .

وسوف نستعمل نظرية كيلى هاميلتون المعروفة لإيجاد المصفوفة  $\exp[-\sqrt{A(s)} x]$  .

المعادلة المميزة للمصفوفة  $A(s)$  يمكن أن تُكتب في الشكل التالي :

$$k^2 - k(\alpha_1 + \alpha_3) + (\alpha_1 \alpha_3 - \varepsilon_1 \alpha_1 \alpha_2) = 0 , \quad (3.42)$$

وجذور هذه المعادلة  $k_1$  و  $k_2$  تحقق العلاقات التالية :

$$k_1 + k_2 = \alpha_1 + \alpha_3 ,$$

$$k_1 k_2 = \alpha_1 \alpha_3 - \varepsilon_1 \alpha_1 \alpha_2 .$$

ومفكوك متسلسلة تايلور للمصفوفة (3.41) يأخذ الشكل التالي :

$$\exp[-\sqrt{A(s)} x] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-\sqrt{A(s)} x]^n}{n!} . \quad (3.43)$$

وباستعمال نظرية كيلى هاميلتون ، فإنه يمكننا التعبير عن المصفوفة  $A^2$  والمصفوفات التي لها أس أعلى من 2 بدلالة كلا من المصفوفة  $A$  و  $I$  ، حيث أن  $I$  مصفوفة الوحدة من الدرجة الثانية .

وبناءً على ذلك ، فإن المتسلسلة اللانهائية في المعادلة (3.43) يمكن أن تتحول إلى الشكل التالي :

$$\exp[-\sqrt{A(s)x}] = a_0(x,s)I + a_1(x,s)A(s) \quad . \quad (3.44)$$

حيث  $a_0$  و  $a_1$  معاملات تعتمد على  $S$  و  $X$  .

وأيضاً بناءً على نظرية كيلى هاميلتون ، فإن جذور المعادلة المميزة  $k_1$  و  $k_2$  للمصفوفة  $A$  يجب أن تحقق المعادلة (3.44) ، وعليه فإننا نحصل على :

$$\exp(-\sqrt{k_1}x) = a_0 + a_1k_1 \quad , \quad (3.45)$$

$$\exp(-\sqrt{k_2}x) = a_0 + a_1k_2 \quad . \quad (3.46)$$

وبحل النظام الخطي أعلاه ، نحصل على :

$$a_0 = \frac{k_1e^{-\sqrt{k_2}x} - k_2e^{-\sqrt{k_1}x}}{k_1 - k_2} \quad , \quad (3.47)$$

$$a_1 = \frac{e^{-\sqrt{k_1}x} - e^{-\sqrt{k_2}x}}{k_1 - k_2} \quad . \quad (3.48)$$

ومنها نحصل على :

$$\exp[-\sqrt{A(s)}x] = L_{ij}(x, s) , \quad i, j = 1, 2 , \quad (3.49)$$

حيث :

$$L_{11} = \frac{e^{-\sqrt{k_2}x}(k_1 - \alpha_1) - e^{-\sqrt{k_1}x}(k_2 - \alpha_1)}{k_1 - k_2} , \quad L_{12} = \frac{\varepsilon_1 \alpha_1 (e^{-\sqrt{k_1}x} - e^{-\sqrt{k_2}x})}{k_1 - k_2} ,$$

$$L_{22} = \frac{e^{-\sqrt{k_1}x}(k_2 - \alpha_3) - e^{-\sqrt{k_2}x}(k_1 - \alpha_3)}{k_2 - k_1} , \quad L_{21} = \frac{\alpha_2 (e^{-\sqrt{k_1}x} - e^{-\sqrt{k_2}x})}{k_1 - k_2} .$$

ويمكننا أن نكتب الحل في المعادلة (3.41) على الصورة التالية :

$$\bar{V}(x, s) = L_{ij} \bar{V}(0, s) . \quad (3.50)$$

لذلك ، نحصل على :

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{k_1 - k_2} \left[ \left[ \varepsilon_1 \alpha_1 \bar{e}_0 - (k_2 - \alpha_1) \tilde{\varphi}_0 \right] e^{-\sqrt{k_1}x} - \left[ \varepsilon_1 \alpha_1 \bar{e}_0 - (k_1 - \alpha_1) \tilde{\varphi}_0 \right] e^{-\sqrt{k_2}x} \right] , \quad (3.51)$$

$$\bar{e} = \frac{1}{k_1 - k_2} \left[ \left[ \alpha_2 \bar{\varphi}_0 - (k_2 - \alpha_3) \bar{e}_0 \right] e^{-\sqrt{k_1}x} - \left[ \alpha_2 \bar{\varphi}_0 - (k_1 - \alpha_3) \bar{e}_0 \right] e^{-\sqrt{k_2}x} \right] , \quad (3.52)$$

وباستخدام المعادلتين (3.37) و(3.51) ، نحصل على :

$$\bar{\theta} = \frac{1}{k_1 - k_2} \left[ \begin{aligned} & \left[ \alpha_1 \varepsilon_1 \bar{e}_0 - (k_2 - \alpha_1) \bar{\phi}_0 \right] (1 - \beta k_1) e^{-\sqrt{k_1} x} - \\ & \left[ \alpha_1 \varepsilon_1 \bar{e}_0 - (k_1 - \alpha_1) \bar{\phi}_0 \right] (1 - \beta k_2) e^{-\sqrt{k_2} x} \end{aligned} \right] \quad (3.53)$$

### 5-3: التطبيق :

#### Application

الآن ، سوف نستخدم الشروط الحدية على السطح  $x = 0$  والتي تُعطى على الشكل

التالي :

#### (1) الشروط الحدي الحراري:

#### The thermal boundary condition

سنعتبر وجود صدمة حرارية عند السطح  $x = 0$  كالتالي :

$$\varphi(0, t) = \varphi_1 H(t) \quad , \quad (3.54)$$

حيث أن  $\varphi_1$  ثابت .

وباستخدام تحويل لابلاس كما عرفناه سابقاً ، تصبح المعادلة السابقة على الصورة :

$$\bar{\varphi}(0) = \frac{\varphi_1}{s} \quad (3.55)$$

وباستخدام المعادلتين (3.5) و(3.6) مع المعادلة (3.55) نحصل على :

$$\bar{\varphi}(0, s) = \bar{\varphi}_0 = \frac{\ell}{s} , \quad (3.56)$$

حيث :

$$\ell = \varphi_1 + \frac{K_1}{2} \varphi_1^2 .$$

(2) الشرط الحدي الميكانيكي :

### The mechanical boundary condition

سنعتبر أن السطح  $x = 0$  خالي من أي انفعال ، لذلك فإن :

$$e(0, t) = 0 , \quad (3.57)$$

وبعد أخذ تحويل لابلاس لطرفي العلاقة نحصل على :

$$\bar{e}(0, s) = \bar{e}_0 = 0 . \quad (3.58)$$

وبتطبيق الشروط الحدية في (3.56) و(3.58) في المعادلات (3.51)-(3.53) نحصل على ما

يلي :

$$\bar{\varphi} = \frac{\ell}{s(k_1 - k_2)} \left[ (\alpha_1 - k_2) e^{-\sqrt{k_1}x} - (\alpha_1 - k_1) e^{-\sqrt{k_2}x} \right] , \quad (3.59)$$

$$\bar{e} = \frac{\ell \alpha_2}{s(k_1 - k_2)} \left[ e^{-\sqrt{k_1}x} - e^{-\sqrt{k_2}x} \right], \quad (3.60)$$

و

$$\bar{\theta} = \frac{\ell}{s(k_1 - k_2)} \left[ (\alpha_1 - k_2)(1 - \beta k_1) e^{-\sqrt{k_1}x} - (\alpha_1 - k_1)(1 - \beta k_2) e^{-\sqrt{k_2}x} \right], \quad (3.61)$$

ومن المعادلتين (3.25) و(3.60) يمكن أن نحصل على الإزاحة في الشكل التالي :

$$\bar{u} = \frac{-\ell \alpha_2}{s(k_1 - k_2)} \left[ e^{-\sqrt{k_1}x} / \sqrt{k_1} - e^{-\sqrt{k_2}x} / \sqrt{k_2} \right], \quad (3.62)$$

وباستخدام المعادلتين (3.5) و(3.6) مع المعادلة (3.59) ، نحصل على :

$$\bar{\varphi}(x,s) = \frac{1}{K_1} \left[ \sqrt{1 + \frac{2K_1 \ell}{s(k_1 - k_2)} \left[ (\alpha_1 - k_2) e^{-\sqrt{k_1}x} - (\alpha_1 - k_1) e^{-\sqrt{k_2}x} \right]} - 1 \right], \quad (3.63)$$

وأيضاً باستخدام المعادلتين (3.4) و(3.7) مع المعادلة (3.61) ، نحصل على :

$$\bar{\theta}(x,s) = \frac{1}{K_1} \left[ \sqrt{1 + \frac{2\ell K_1}{s(k_1 - k_2)} \left[ (\alpha_1 - k_2)(1 - \beta k_1) e^{-\sqrt{k_1}x} - (\alpha_1 - k_1)(1 - \beta k_2) e^{-\sqrt{k_2}x} \right]} - 1 \right], \quad (3.64)$$

وبالتعويض بالمعادلتين (3.60) و(3.64) في المعادلة (3.36) ، نحصل على :

$$\bar{\sigma} = \frac{\ell\alpha_2 \left[ e^{-\sqrt{k_1}x} - e^{-\sqrt{k_2}x} \right]}{s(k_1 - k_2)} - \frac{\varepsilon_2}{K_1} \left[ \sqrt{1 + \frac{2\ell K_1}{s(k_1 - k_2)}} \left[ (\alpha_1 - k_2)(1 - \beta k_1)e^{-\sqrt{k_1}x} - (\alpha_1 - k_1)(1 - \beta k_2)e^{-\sqrt{k_2}x} \right] - 1 \right]. \quad (3.65)$$

وهو الحل الكامل للمسألة في مجال تحويل لابلاس .

### **3-6: معكوس تحويلات لابلاس:**

#### **Inversion of Laplace transforms**

تم استخدام نفس الطريقة والتي ذكرت في الباب الثاني في إيجاد معكوس تحويلات لابلاس عددياً.

### **3-7: النتائج العددية ومناقشتها:**

#### **Numerical Results and Discussion**

لإيجاد الحل العددي تم استخدام معاملات مادة النحاس وهي على الصورة [60] :

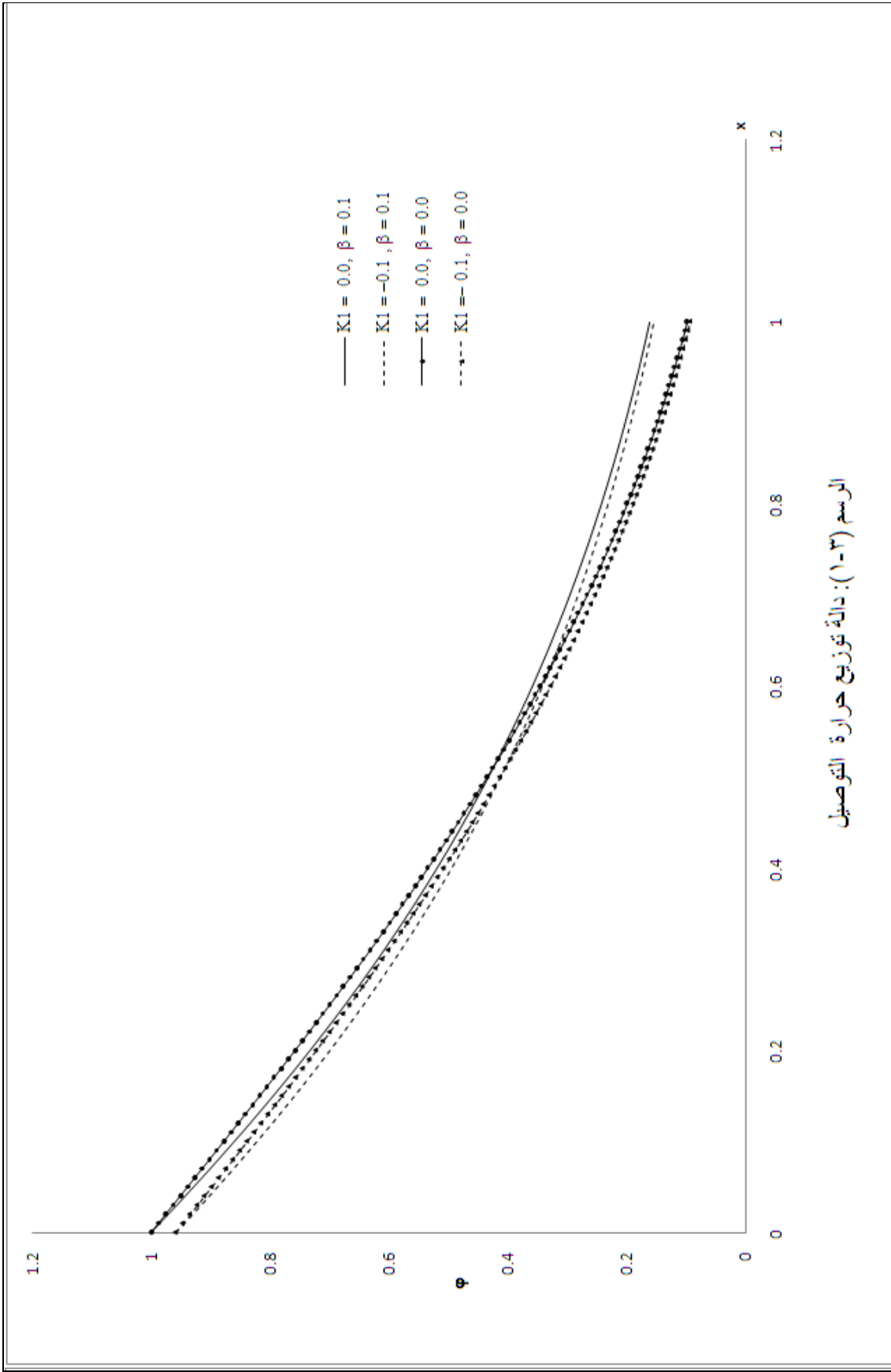
$$K_o = 386 \text{ N/K sec}, \alpha_T = 1.78 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}, C_E = 383.1 \text{ m}^2/\text{K}, \eta = 8886.73 \text{ m/sec}^2$$

$$, \mu = 3.86 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \lambda = 7.76 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \rho = 8954 \text{ kg/m}^3, \tau_o = 0.02 \text{ sec},$$

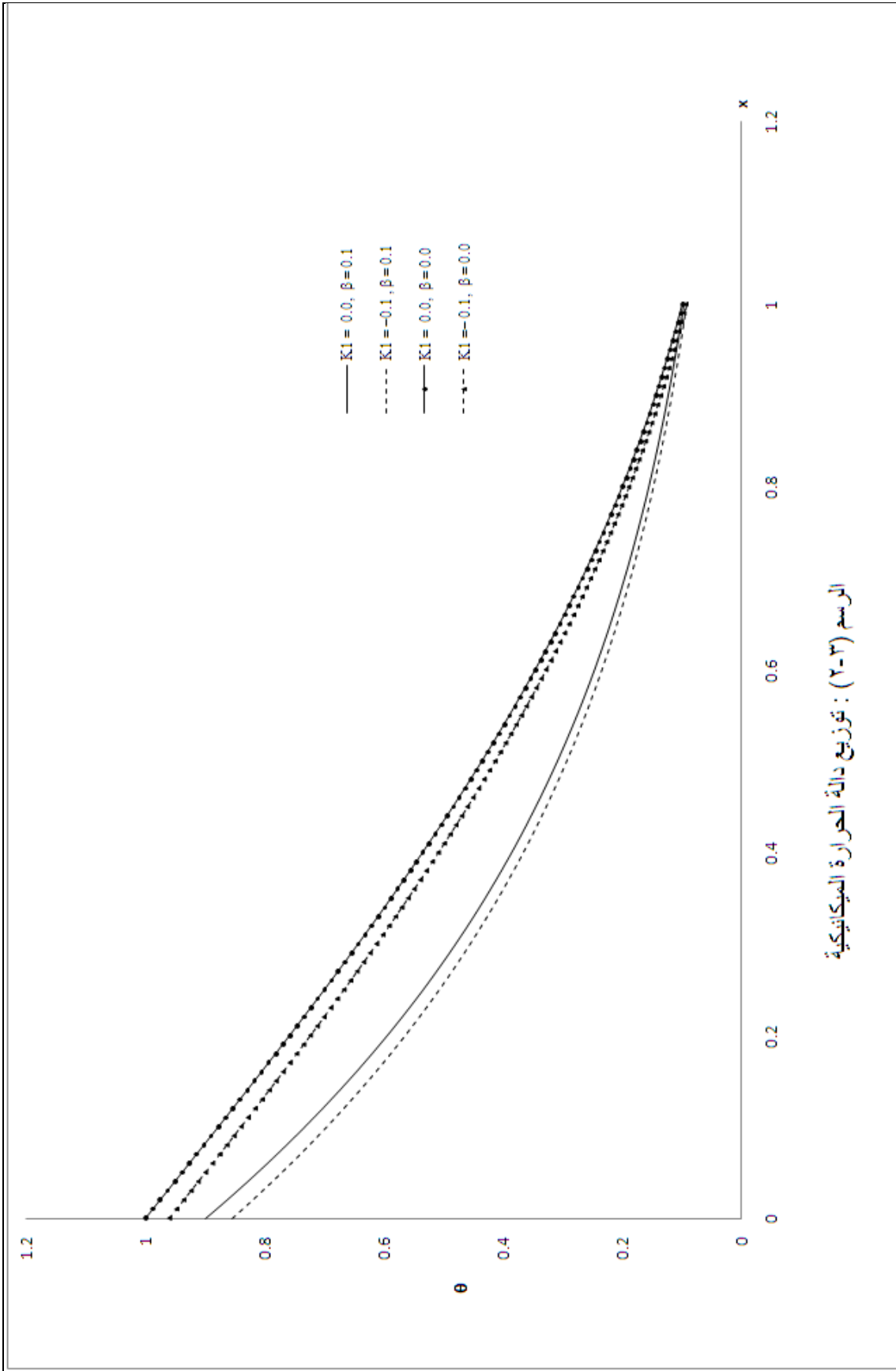
$$T_o = 293 \text{ K}, K_1 = -0.1 \text{ K}^{-1}, \varepsilon_1 = 1.618, \beta = 0.1, \varepsilon_2 = 0.01041.$$

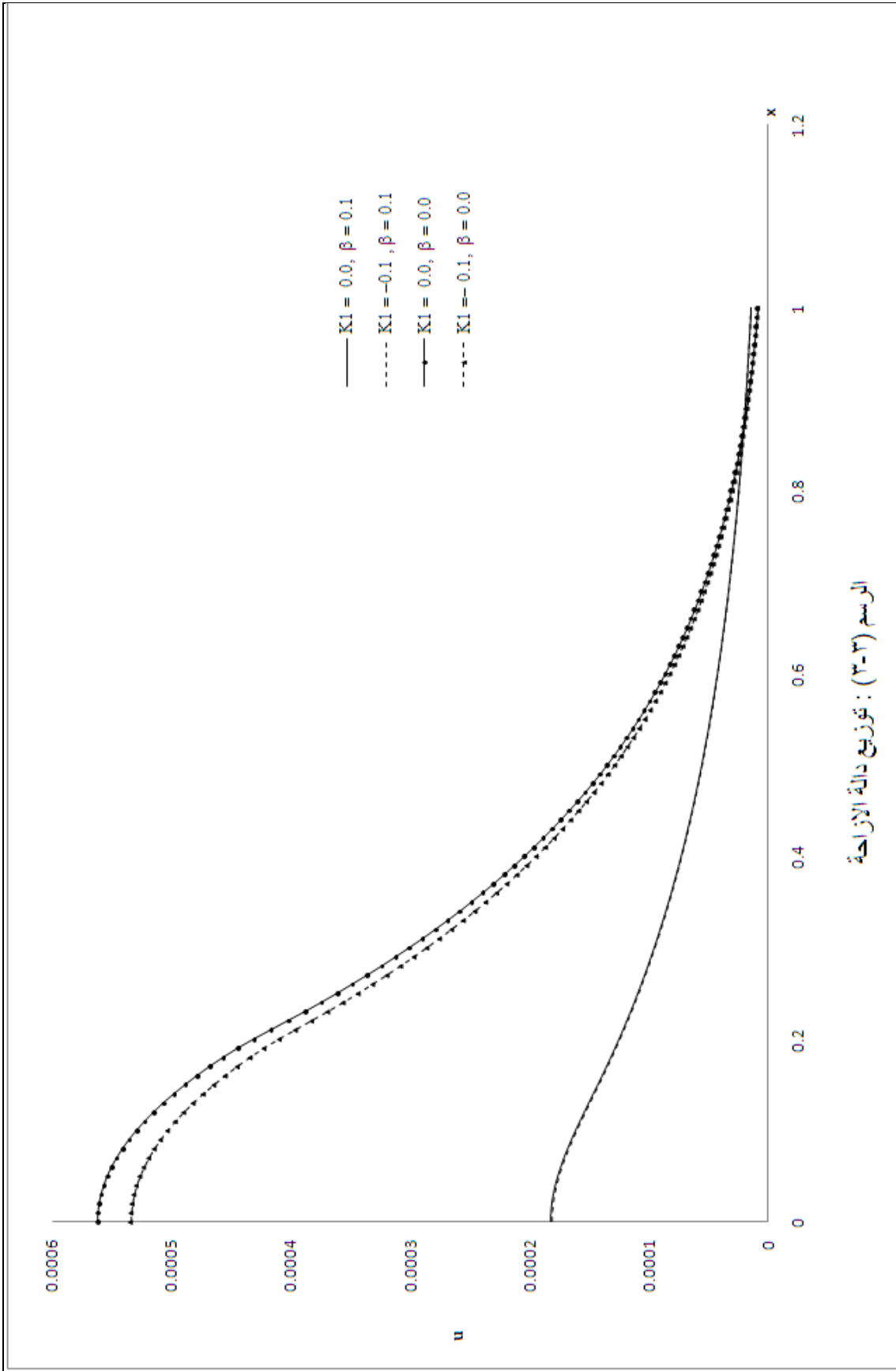
تمت الحسابات العددية للحل عند قيم الزمن  $t=0.2$  وشدة الحرارة المؤثرة على الوسط عند السطح الحدي له هي  $\varphi_1=1.0$  وتم رسم منحنيات توزيع دوال حرارة التوصيل و الحرارة الميكانيكية و دالة الإجهاد و دالة الإزاحة لقيم  $X$  المختلفة عند قيمتين للثابت  $K_1$  أولهما  $K_1=0.0$  وهي تعني الرجوع للحالات السابقة عندما يكون معامل التوصيل الحراري ثابت و الثانية  $K_1=-0.1$  وهي تعني الحالة الجديدة محل الدراسة و التي فيها يكون معامل التوصيل الحراري متغير و قد لوحظ مدى التأثير الكبير لهذا البارامتر في كل دوال الحالة. كما تم أيضاً الرسم في حالتين مختلفتين لقيمة الثابت  $\beta$  أولهما عندما تكون قيمته تساوي صفر و هي تعني حالة الوسط عندما يتبع نظرية المرونة الحرارية المعممة ذات درجة واحدة و ثانيهما عندما  $\beta=0.1$  وهي تعني نظرية المرونة الحرارية المعممة ذات درجتين حرارية و يتضح من الرسومات مدى الفرق بين النتائج العددية بين النظريتين محل الدراسة مما يؤكد على أن التفريق بين حرارة التوصيل للوسط المرن وبين حرارته الميكانيكية هام و ضروري لأنه عالج نقط عدم الاتصال الموجودة في توزيع دالة الإجهاد ودالة الانفعال وأصبحا متصلان كما يتضح في الرسم (3-4) و (3-5).

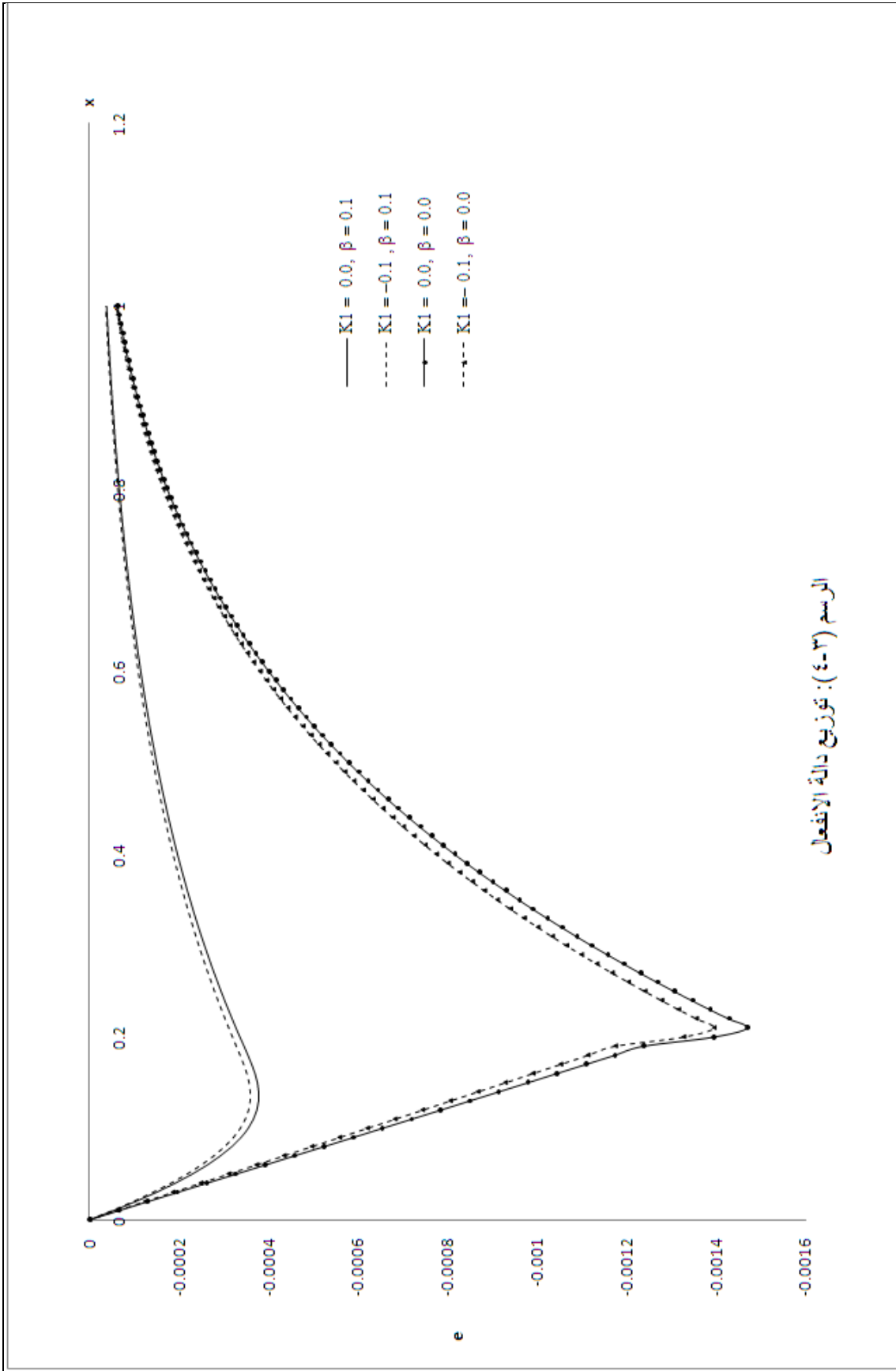


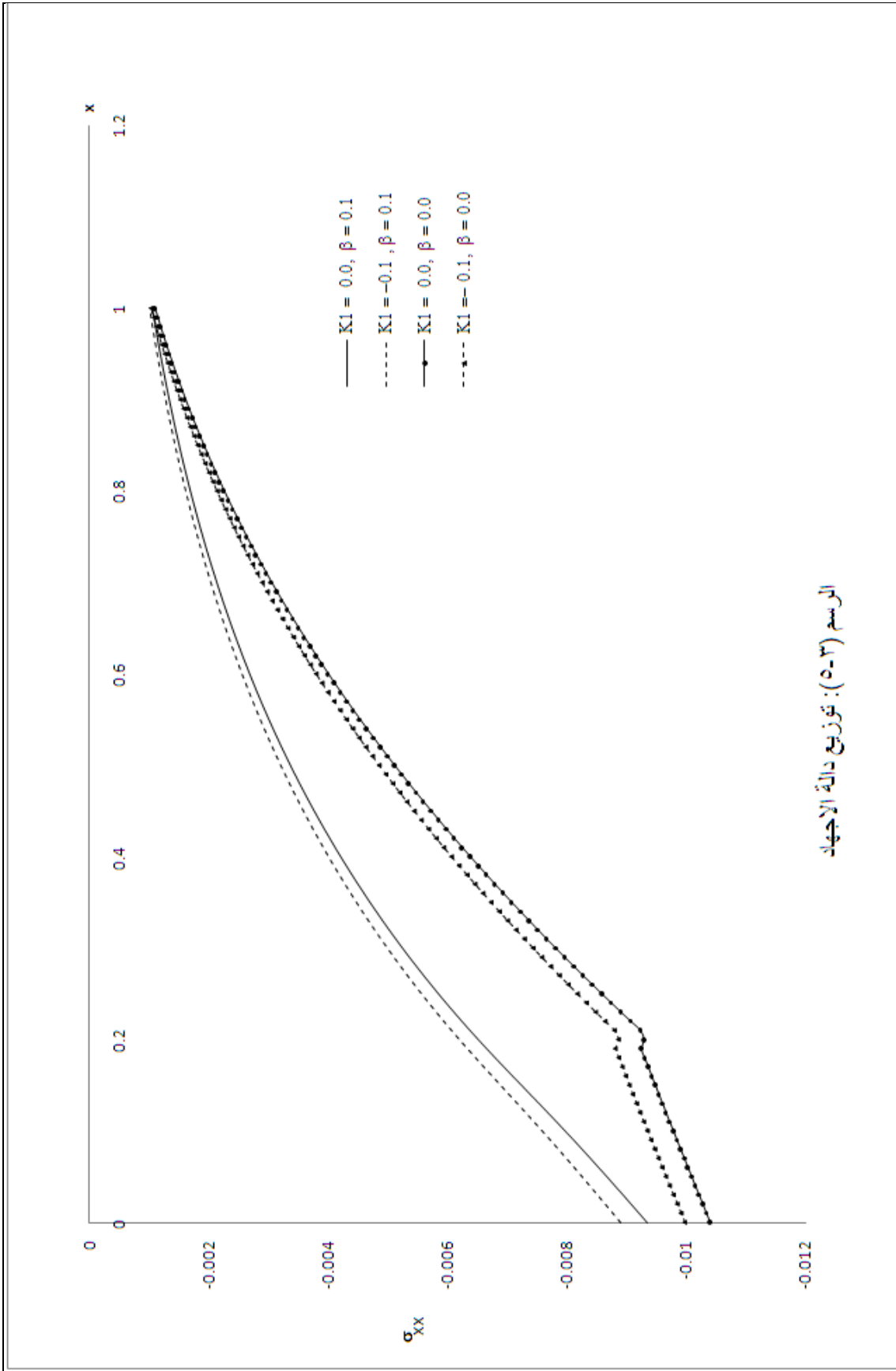


الرسم (٣-١): دالة توزيع حرارة التوصيل









الرسم (٥-٣): توزيع دالة الاجهاد

## المراجع

### References

- [1] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of elasticity, third edition, Mcgraw-hill book company, Auckland, 1970.
- [2] Y. C. Fung, Foundations of solid mechanics, Prentice-hall international inc., London, 1968.
- [3] A. L. Cauchy, Bulletin de la société philomathique, Paris, 1923.
- [4] I. S. Sokolnikoff, Mathematical theory of elasticity, second edition, Mcgraw-hill book company, New York, 1956.
- [5] J. M. Duhamel, Second memoire sur les phenomenes thermo-mechanique, J. de l'école polytechnique, vol.15, 1837.
- [6] K. Neumann, Vorlesungen uber die theorie der elasticitat, Meyer, Breslau, 1885.
- [7] M. Biot, Thermoelasticity and irreversible thermo-dynamics, J. Appl. Phys., vol. 27, pp 240-253, 1956.
- [8] H. Lord and Y. Shulman, A generalized dynamical theory of thermo-elasticity, J. Mech. Phys. Solid, vol. 15, pp. 299-309, 1967.

- [9] Ranjit S. Dhaliwal and Hany H. Sherief, On generalized thermoelasticity, ph. D. thesis, university of Calgary, Canada, 1980.
- [10] Ranjit S. Dhaliwal and Hany H. Sherief, Generalized thermoelasticity for anisotropic media, *Quart. J. Appl. Math*, vol. 33, pp. 1-8, 1980.
- [11] Richard B. Hetnarski, Thermal stresses, vol. I, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [12] H. Youssef, Theory of two-temperature generalized thermoelasticity, *IMA. J. Appl. Math*, vol.71(3), pp. 383-390, 2006.
- [13] J. D. Achenbach, Wave propagation in elastic solids, North-Holland publishing company, Amsterdam, 1984.
- [14] F. Andrews, Thermodynamics: principles and applications, John-Wiley and Sons Inc., New York, 1971.
- [15] E. Guggenheim, Thermodynamics, classical and statistical, *Handbuch Der Physik*, vol. 3, 1959.
- [16] J. L. Nowinski, Theory of thermoelasticity with applications, Sijthoff & Noordhoff international publishers, Alphen aan Den Rijn, 1978.
- [17] W. Nowacki, Dynamic problems of thermoelasticity, Noordhoff publishing, international, Leyden, 1975.
- [18] J. Weiner, A uniqueness theorem for the coupled thermoelastic problem, *Quart. J. Appl. Math.*, vol. 15, pp. 102-105, 1957.

- [19] R. Nickell and J. Sackman, Variational principles for linear coupled thermoelasticity, *Quart. J. Appl. Math.*, vol. 26, pp. 11-26, 1968.
- [20] R. Hetnarski, Coupled one-dimensional thermal shock problem for small times, *Arch. Mech. Stos.*, vol. 13, pp. 295-306, 1961.
- [21] R. Hetnarski, Solution of the coupled problem of thermoelasticity in the form of series of functions, *Arch. Mech. Stos.*, vol. 16, pp. 919-941, 1964.
- [22] R. Hetnarski, The fundamental solution of the coupled thermoelastic problem for small times, *Arch. Mech. Stos.*, vol. 16, pp. 23-32, 1964.
- [23] J. Ignaczak, Dynamic thermoelastic problem of a spherical cavity, *Arch. Mech. Stos.*, vol. 11, pp. 399-408, 1959.
- [24] W. Nowacki, A dynamical problem of thermoelasticity, *Arch. Mech. Stos.*, vol. 9, pp. 325-334, 1957.
- [25] Y. Takeuti and Y. Tanigawa, A new technique for coupled plane thermal stress problems, *J. Strain Analysis*, vol. 17, pp. 133-138, 1982.
- [26] L. Bahar and R. Hetnarski, State space approach to thermoelasticity, *J. Thermal Stresses*, vol. 1, pp. 135-145, 1978.
- [27] J. Ignaczak, Uniqueness in generalized thermoelasticity, *J. Thermal Stresses*, vol. 2, pp. 171, 1979.
- [28] J. Ignaczak, A note on uniqueness in thermoelasticity with one relaxation time, *J. Thermal Stresses*, vol. 5, pp. 257-263, 1982.



- [29] Hany H. Sherief and Ranjit S. Dhaliwal, A uniqueness theorem and a variational principle for generalized thermoelasticity, *J. Thermal Stresses*, vol. 3, pp. 223-230, 1980.
- [30] Hany H. Sherief, On uniqueness and stability in generalized thermoelasticity, *Quart. Appl. Math.*, vol. 45, pp. 773-778, 1987.
- [31] Mohammed N. Anwar and Hany H. Sherief, State space approach to generalized thermoelasticity, *J. Thermal Stresses*, vol. 11, pp. 353-365, 1988.
- [32] Hany H. Sherief, State space formulation for generalized thermoelasticity with one relaxation time including heat sources, *J. Thermal Stresses*, vol. 16, pp. 163-180, 1993.
- [33] Hany H. Sherief and Mohammed N. Anwar, State space approach to two-dimensional generalized thermoelasticity problems, *J. Thermal Stresses*, vol. 17, pp. 567-590, 1994.
- [34] Mohammed N. Anwar and Hany H. Sherief, Boundary integral equation formulation of generalized thermoelasticity in a Laplace transform domain, *Appl. Math. Modelling*, vol. 12, pp. 161-166, 1988.
- [35] Hany H. Sherief, Fundamental solution of the generalized thermoelastic problem for short times, *J. Thermal Stresses*, vol. 9, pp. 151-164, 1986.
- [36] Hany H. Sherief and Mohammed N. Anwar, Problem in generalized thermoelasticity, *J. Thermal Stresses*, vol. 9, pp. 165-181, 1986.

- [37] Hany H. Sherief and Mohammed N. Anwar, Two-dimensional problem of a moving heated punch in generalized thermoelasticity, *J. Thermal Stresses*, vol. 9, pp. 325-343, 1986.
- [38] Mohammed N. Anwar and Hany H. Sherief, A problem in generalized thermoelasticity for an infinitely long annular cylinder, *Int. J. Engng. Sci.*, vol. 26, pp. 301-306, 1988.
- [39] Hany H. Sherief and Mohammed N. Anwar, A problem in generalized thermoelasticity for an infinitely long annular cylinder composed of two different materials, *Acta Mechanica*, vol. 80, pp. 137-149, 1989.
- [40] Hany H. Sherief and Mohammed N. Anwar, Generalized thermoelasticity problem for a plate subjected to moving heat sources on both sides, *J. Thermal Stresses*, vol. 15, pp. 489-505, 1992.
- [41] Hany H. Sherief and Mohammed N. Anwar, A two dimensional generalized thermoelasticity problem for an infinitely long cylinder, *J. Thermal Stresses*, vol. 17, pp. 213-227, 1994.
- [42] Hany H. Sherief and Magdy A. Ezzat, Solution of the generalized problem of thermoelasticity in the form of series of functions, *J. Thermal Stresses*, vol. 17, pp. 75-95, 1994.
- [43] Hany H. Sherief and Farid A. Hamza, Generalized thermoelastic problem of a thick plate under axisymmetric temperature distribution, *J. Thermal Stresses*, vol. 17, pp. 435-453, 1994.

- [44] El-Magraby and H. Youssef, State space approach to generalized thermoelastic problem with thermo-mechanical shock, *J. Appl. Math. and Computation*, vol. 156, issue 2, pp. 577-586, 2004.
- [45] H. Youssef, State-space approach in generalized thermoelasticity for an infinite layer material with variable thermal conductivity, *Sixth Amu pan-African Congress of Mathematicians (Pacom, Tunisia)*, 2004.
- [46] H. Youssef, The dependence of the modulus of elasticity and the thermal conductivity on the reference temperature in generalized thermoelasticity for an infinite material with a spherical cavity, *J. Appl. Math. and Mechanics*, vol.26, No.4, pp.470-475, 2005.
- [47] H. Youssef, Thermo-mechanical shock problem of generalized thermoelastic infinite body with a cylindrical cavity and material properties depends on the reference temperature, *J. Thermal Stresses*, vol. 28, No. 5, pp. 521 - 532, 2005.
- [48] El-Magraby and H. Youssef, A two-dimensional thermoelasticity problem for thermo mechanical shock with two relaxation times, *J. Applied Mathematics and Computation (AMC)*, vol. 120, pp. 172-184, 2005.
- [49] H. Youssef, Thermal shock problem of a generalized thermoelastic layered composite material with variable thermal conductivity, *J. Mathematical Problem in Engineering*, pp. 1–14, 2006.

- [50] El-Bary and H. Youssef, Thermal shock problem for one dimensional generalized thermoelastic layered composite material, *J. Mathematical and Computational Applications*, vol. 11, No. 2, pp.103-110, 2006.
- [51] Chen, P. J., and Gurtin, M. E., On a theory of heat conduction involving two temperatures. *Zamp* 19, 614-627, 1968.
- [52] Warren, W. E. and Chen, P. J., Wave propagation in the two-temperature theory of thermoelasticity. *Acta Mech.* vol. 16, pp. 21-33, 1973.
- [53] Chen, P. J., Gurtin, M. E. and Williams, W. O., On the thermodynamics of non-simple elastic materials with two temperatures. *Zamp*, vol. 20, pp. 107-112, 1969.
- [54] H. Youssef and Eman A. AL-Lehaibi, State-space approach of two-temperature generalized thermoelasticity of one-dimensional problem, *Int. J. Solids and Structures*,(IJSS), Vol. 44, pp. 1550-1562, 2007.
- [55] H. Youssef and Amnah H. Al-Harby, State-Space Approach of Two-Temperature Generalized Thermoelasticity of Infinite Body with a Spherical Cavity Subjected to Different Types of Thermal Loading, *J. Arch. Appl. Mech*,vol.77(9), pp. 675-687, 2007.
- [56] E. Bassiouny and H. Youssef, Two-Temperature Generalized Thermopiezoelasticity of Finite Rod Subjected to Different Types of Thermal Loading, *J. Thermal Stresses*, vol. 31, pp. 233-245, 2008.

- [57] H. Youssef, Two-Dimensional Problem of Two-Temperature Generalized Thermoelastic Half-Space Subjected to Ramp-Type Heating, *J. Computational Mathematics and Modeling*, vol.19, No. 2, 2008.
- [58] H. Youssef, Generalized Thermoelasticity of an Infinite Body with a Cylindrical Cavity and Variable Material Properties , *J. Thermal Stresses*, vol. 28, Number 5, pp. 521 - 532, 2005.
- [59] G. Honig and U. Hirdes, A method for the numerical inversion of Laplace transform, *J. Comp. Appl. Math.*, vol. 10,pp. 113-132, 1984.
- [60] H. Youssef, Stat-space approach for conducting magneto-thermoelastic medium with variable electrical and thermal conductivity, ts2005-6th international congress on thermal stresses, Vienna, Austria, 2005.

## Summery

This work is concerning with elastic materials, i.e a material which deformed when it is acted upon by an external forces. Almost all engineering materials possess, To a certain extent, the property of elasticity. Thermoelasticity is a branch of applied Mechanics that investigates the interaction between the strain and the temperature fields using the thermodynamics of irreversible processes.

In the introduction, we presents a review of the historical development of the theory of thermoelasticity and give a literature survey on the main subject of this theses.

This theses consists of three chapters as follows:

**In the first chapter,** we give the review of the classical theory of linear elasticity and the basic principle of the theory of thermodynamics. Contains also the derivation of the basic equations of the theory of uncoupled thermoelasticity showing its basic shortcomings, the derivations of the basic equations of the coupled theory of thermoelasticity showing how this theory has eliminated one of the two shortcomings of the theory of uncoupled thermoelasticity and how this theory still predicts infinite speeds of propagation of heat waves in contradiction to physical observations, the derivations of the basic equations of the generalized

theory of thermoelasticity with one relaxation time and shows how this theory has dealt with the shortcomings of both the uncoupled and the coupled theories of thermoelasticity, the derivations of the basic equations of the two-temperature generalized thermoelasticity with one relaxation time and finally, the basic equation of magneto thermoelasticity.

**In the second chapter,** The equations of generalized thermoelasticity with one relaxation time in an isotropic elastic medium with temperature-dependent mechanical and thermal properties are established. The modulus of elasticity and the thermal conductivity are taken as linear function of temperature. A problem of an infinite body with a cylindrical cavity has been solved by using Laplace transform techniques. The interior surface of the cavity is subjected to thermal and mechanical shocks. The inverse of the Laplace transform is done numerically using a method based on Fourier expansion techniques. The Temperature, the displacement and the stress distributions are represented graphically. A comparison was made with the results obtained in the case of temperature-independent mechanical and thermal properties.

**In the third chapter,** the consideration of variable thermal conductivity with linear function on temperature has been taken into account in the context of two-temperature generalized thermoelasticity (Youssef model). The governing equations have been derived and used to solve the problems of an elastic half-space medium in one dimensional. The governing equations have been cast into matrix form and state-space approach with Laplace transform techniques were used to get the general solution for any set of boundary conditions. The solution has been applied for thermally shocked medium which has no strain on its

bounding plane. The numerical Laplace transform has been calculated by using the Riemann-sum approximation method. The distribution of the conductive heat, the thermo-dynamical heat, the strain, the displacement and stress have been shown graphically with some comparisons.



